



# Convexité dans le plan discret. Application à la tomographie

Alain Daurat

## ► To cite this version:

Alain Daurat. Convexité dans le plan discret. Application à la tomographie. Autre [cs.OH]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2000. Français. NNT: . tel-00012136

**HAL Id: tel-00012136**

**<https://theses.hal.science/tel-00012136>**

Submitted on 13 Apr 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris 7 - Denis Diderot  
UFR d'Informatique

Année :

Numéro :

## THÈSE

pour l'obtention du Diplôme de

**Docteur de l'Université Paris 7**  
**Spécialité : Algorithmique**  
présentée et soutenue publiquement

par

Alain DAURAT

le 11 décembre 2000

Titre :

# Convexité dans le plan discret Application à la tomographie

---

Directeur de thèse :

Maurice NIVAT

---

Jury :

Gilles BERTRAND, rapporteur

Alberto DEL LUNGO

Attila KUBA, rapporteur

Jacques MAZOYER

Maurice NIVAT

Jean-Pierre REVEILLÈS, rapporteur

Denis RICHARD

---

Laboratoire de Logique, d'Algorithmique, et d'Informatique de Clermont 1 — EA 2146  
Laboratoire d'Informatique Algorithmique: Fondements et Applications — UMR 7089



## Remerciements

Je tiens à remercier :

- *Attila Kuba*, *Gilles Bertrand* et *Jean-Pierre Reveillès* d'avoir accepté de rapporter cette thèse;
- *Maurice Nivat* pour m'avoir guidé pendant ces quatre ans. Il a su, dès le début de ma thèse, poser les bonnes questions qui m'ont permis de me familiariser avec le domaine;
- *Alberto Del Lungo* et *Sara Brunetti* pour toutes nos fructueuses discussions, et merci Sara d'avoir cru dès le début en la Q-convexité;
- et bien sûr tous les membres du LLAIC et en particulier *Denis Richard* et *Yan Gérard* et tous ceux que j'ai côtoyés au bureau C8 : *Serge Burckel*, *Elias Tahhan-Bittar*, *Thierry Vallée*, *Sébastien Deguy*, *Véronique Mauduit*, *Jasmine Burguet*, etc.



# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>I Géométrie des convexes</b>	<b>11</b>
<b>1 Convexité totale</b>	<b>13</b>
1.1 Définitions . . . . .	13
1.2 Connexité et convexité . . . . .	14
1.2.1 Définitions . . . . .	14
1.2.2 Liens connexité, 2-convexité, convexité totale dans $\mathbb{Z}^2$ . . . . .	15
1.2.3 Et dans $\mathbb{Z}^3$ ? . . . . .	19
<b>2 La Q-convexité</b>	<b>21</b>
2.1 Directions dans $\mathbb{Z}^2$ . . . . .	21
2.1.1 Sous-réseaux liés à deux directions . . . . .	21
2.2 Convexité simple . . . . .	23
2.3 Q-convexité . . . . .	23
2.4 Points saillants . . . . .	25
2.4.1 Définitions et premières propriétés . . . . .	25
2.4.2 Consécutivité des saillants . . . . .	26
2.5 Liens avec la connexité . . . . .	30
2.5.1 L'insécabilité . . . . .	30
2.5.2 Directions horizontales et verticales . . . . .	30
2.5.2.1 8-connexité . . . . .	30
2.5.2.2 4-connexité . . . . .	33
2.5.3 Extension à 3 directions ou plus . . . . .	33
2.6 Liens avec la convexité totale . . . . .	35
2.7 Les Q-convexes forts . . . . .	36
2.7.1 Définitions . . . . .	36
2.7.2 Liens avec la Q-convexité . . . . .	37
2.7.2.1 Avec l'insécabilité . . . . .	40
2.7.2.2 Avec le déterminant . . . . .	41
2.7.3 Points saillants des Q-convexes forts . . . . .	42

<b>3</b>	<b>Fonctions convexes discrètes</b>	<b>47</b>
3.1	Définition, premières propriétés . . . . .	47
3.1.1	Convexité . . . . .	47
3.1.2	Convexité stricte . . . . .	50
3.2	Cas de la dimension 1 . . . . .	50
3.3	Minima d'une fonction strictement convexe . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Les points médians</b>	<b>55</b>
4.1	Définition et premières propriétés des points médians . . . . .	55
4.1.1	Définition . . . . .	55
4.1.2	Projections . . . . .	56
4.1.3	Caractérisation locale des points médians . . . . .	56
4.1.4	Le nombre de points médians . . . . .	60
4.2	Appartenance des points médians . . . . .	60
4.3	Les médians sur chaque réseau. . . . .	63

## II Reconstruction 67

<b>Introduction</b>	<b>69</b>
1	Tomographie continue ( <i>computerized tomography</i> ) . . . . .
2	Tomographie géométrique . . . . .
3	Tomographie discrète . . . . .
<b>5</b>	<b>Reconstruction des Q-convexes</b>
5.1	Opérations de complétion . . . . .
5.2	Les types des droites . . . . .
5.3	Expression de l'existence d'une solution par une 2-formule . . . . .
5.3.1	Formules exprimant $X_q E(j) = q_j$ . . . . .
5.3.2	Formules exprimant la Q-convexité . . . . .
5.3.3	Complexité de l'algorithme . . . . .
5.4	Extension à plus de deux directions . . . . .
5.5	Connexité . . . . .
5.6	Reconstruction avec localisation a priori . . . . .
5.7	Implémentation . . . . .
<b>6</b>	<b>Unicité dans le problème de la reconstruction</b>
6.1	Les « switching-components » . . . . .
6.1.1	Définitions et première propriétés . . . . .
6.1.2	Énumération de switching-components . . . . .
6.2	Le théorème d'unicité . . . . .
6.2.1	Cas des totalement convexes . . . . .
6.2.2	Extension aux Q-convexes . . . . .
6.2.2.1	Polygonalisation d'un « switching-component » . . . . .
6.2.2.2	Les $\mathcal{D}$ -polygones Q-convexes forts . . . . .

6.2.3	Corollaires . . . . .	111
6.3	Unicité d'une solution donnée . . . . .	111
<b>7</b>	<b>Reconstruction approchée des Q-convexes forts</b>	<b>113</b>
7.1	Avec deux directions . . . . .	113
7.1.1	Les variables booléennes . . . . .	114
7.1.2	Expression de la Q-convexité . . . . .	115
7.1.3	La borne inférieure . . . . .	116
7.1.4	La borne supérieure . . . . .	118
7.1.5	L'algorithme de reconstruction . . . . .	119
7.1.6	Retour à la reconstruction exacte. . . . .	120
7.1.7	Connexité . . . . .	120
7.2	Plus de deux directions . . . . .	121
7.2.1	Reconstruction approchée . . . . .	121
7.2.2	Reconstruction exacte . . . . .	125
7.3	Reconstruction approchée avec localisation a priori . . . . .	126
7.4	Implémentation . . . . .	126
<b>8</b>	<b>Conclusion et problèmes ouverts</b>	<b>127</b>
8.1	Conclusion . . . . .	127
8.1.1	Complexité de RECONSTRUCTION . . . . .	128
8.1.2	Unicité . . . . .	129
8.2	Problèmes ouverts . . . . .	131
8.2.1	Reconstruction . . . . .	131
8.2.1.1	Problème croisé . . . . .	131
8.2.1.2	Totalement convexes . . . . .	131
8.2.2	Reconstruction approchée . . . . .	131
8.2.2.1	Reconstruction continue . . . . .	132
8.2.3	Unicité . . . . .	132
8.2.3.1	Affaiblissement de la convexité . . . . .	132
8.2.3.2	Dimension 3 . . . . .	132
	<b>Annexes</b>	<b>135</b>
<b>A</b>	<b>Listes de « switching-components »</b>	<b>135</b>
A.1	Directions $\{x, y\}$ . . . . .	135
A.2	Directions $\{x, y, x + y, x - y\}$ . . . . .	140
A.3	Directions $\{x, y, 2x + y, x - 2y\}$ . . . . .	142
<b>B</b>	<b>Complexités expérimentales des algorithmes de reconstruction des Q-convexes</b>	<b>143</b>
B.1	Reconstruction des Q-convexes avec l'algorithme du chapitre 5 . . . . .	143
B.2	Reconstruction approchée des Q-convexes forts avec l'algorithme du chapitre 7 . . . . .	144
	<b>Bibliographie</b>	<b>147</b>



<b>Bibliographie</b>	<b>147</b>
<b>Index</b>	<b>151</b>

# Introduction

L'imagerie numérique est un domaine aujourd'hui en plein essor. On peut distinguer principalement deux approches théoriques de cette discipline :

- l'approche continue : on suppose que l'image provient d'une donnée continue, par exemple une image en niveau de gris est vue comme une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0,1]$ .
- l'approche discrète : on considère l'image telle qu'elle est stockée dans l'ordinateur : une image est donc plutôt comme une fonction de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\{0, \dots, 255\}$  si on a 256 niveaux de gris.

La première approche a l'avantage de pouvoir utiliser une grande part des mathématiques déjà existantes. Un exemple de succès de cette approche est la compression JPEG des images qui est basée en particulier sur la transformée de Fourier. Le gros problème de cette approche est que l'on ne contrôle pas les erreurs dues aux procédés de calcul. Par exemple les réels sont souvent approchés par des flottants dont l'arithmétique est encore méconnue.

La seconde approche donne des algorithmes qui sont directement implémentables dans la pratique. Par contre les mathématiques du discret ont été beaucoup moins développées car cette problématique a moins d'un siècle. Mais ces dernières années de nombreuses recherches ont été faites dans ce nouveau domaine que l'on appelle maintenant « géométrie discrète ».

L'objectif de la première partie de cette thèse est l'étude des équivalents discrets d'une notion classique de la géométrie : la *convexité*. En effet dans le continu la convexité est connue depuis l'antiquité et a de nombreuses applications en géométrie, en analyse et en optimisation.

Elle a aussi été utilisée très tôt en imagerie, par exemple la fonction qui remplit un polygone sous X-Windows<sup>1</sup> demande si le polygone à remplir est convexe (voir figure 1). Citons aussi le calcul de l'enveloppe convexe qui est un problème classique de géométrie algorithmique ([Yao90]).

Bien que ce soit une notion très classique sa définition dans le discret n'est pas très évidente car il y a plusieurs façons de généraliser la convexité du continu. Dans le premier chapitre on va présenter la convexité la plus proche de la convexité du continu : la *convexité totale*. Dans le chapitre 2 on introduit une notion plus faible et liée à certaines directions : la *Q-convexité*. Cette notion garde malgré tout des propriétés de la convexité totale : on peut en particulier définir un équivalent des sommets. Le troisième chapitre est dédié aux fonctions convexes de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbb{R}$ . Là aussi on est confronté à des problèmes de définitions. Le quatrième chapitre étudie des points particuliers des convexes, les points médians.

---

1. C'est le logiciel utilisé pour l'affichage graphique des ordinateurs sous système de type Unix

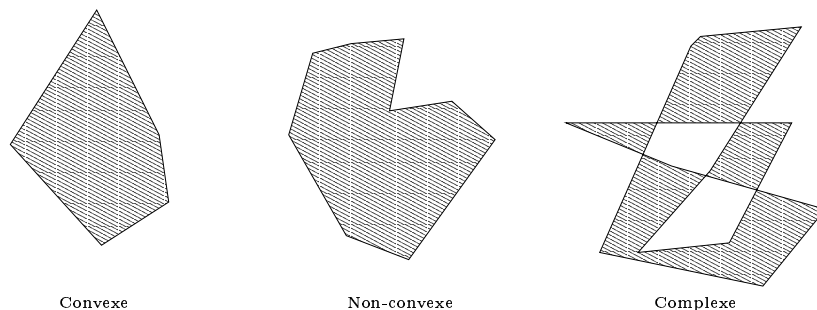


FIG. 1 – *Les trois types de polygones que remplit la fonction `XFillPolygon` sous `X-Windows`*

Dans la deuxième partie on applique cette étude des convexes à la tomographie. Cette technique consiste à reconstituer la structure 3D d'un objet à partir de ses images radiologiques classiques (appelées projections<sup>2</sup>.) Dans le continu si on connaît les projections selon toutes les directions d'un plan, on peut alors reconstruire l'objet grâce une transformation explicite (la transformée de Radon). C'est la technique utilisée dans le scanner médical.

Ce problème a aussi un équivalent dans le discret : il s'agit tout simplement de trouver un objet de l'espace discret à partir du nombre de points dans chaque droite parallèle à certaines directions. Contrairement à ce qui se passe pour la tomographie continue, on se limite à quelques directions de projection. L'étude de ce problème a été stimulée dans le début des années 90 par une technique de microscopie électronique (QUANTITEM) où l'on compte directement le nombre d'atomes dans un cristal.

Les chapitre 5 et 6 ont pour but de montrer que l'on peut reconstruire les ensembles convexes de  $\mathbb{Z}^2$  à partir de leurs projections avec seulement 4 directions de projections. Plus précisément, dans le chapitre 5, on adapte un algorithme déjà connu pour les polyominos HV-convexes ([BDLNP96]) aux Q-convexes. Le chapitre 6 étudiera l'unicité de la solution. Enfin, dans le 7<sup>ème</sup> chapitre, on s'intéressera au cas où les projections sont erronées (par exemple à cause des appareils de mesure).

---

2. Ce ne sont pas vraiment des projections au sens mathématique du terme, car un point de l'image sera rendu plus intense s'il provient d'une plus grande partie de l'objet

Première partie

Géométrie des convexes



# Chapitre 1

## Convexité totale

### 1.1 Définitions

Dans  $\mathbb{R}^n$  la convexité est très simple à définir : un ensemble  $F \subset \mathbb{R}^n$  est dit convexe si tout segment joignant deux points de  $F$  est contenu dans  $F$ . On peut reprendre, telle quelle, cette définition sur  $\mathbb{Z}^n$  :

**Définition 1.1.1** *On dit que  $E$  est 2-convexe (convexe par segment) si pour tout point  $A, B$  de  $E$  les points entiers du segment  $[AB]$  sont dans  $E$ .*

On peut aussi considérer les parties de  $\mathbb{Z}^n$  qui sont traces de convexes de  $\mathbb{R}^n$  :

**Définition 1.1.2** *Une partie  $E$  de  $\mathbb{Z}^n$  est dite totalement convexe si et seulement s'il existe un convexe  $F$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que*

$$E = F \cap \mathbb{Z}^n.$$

Malheureusement cette notion est strictement plus forte que la 2-convexité comme le montre l'exemple de la figure 1.1.

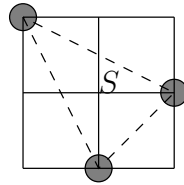


FIG. 1.1 – Une partie de  $\mathbb{Z}^2$  2-convexe non totalement convexe

Si  $F \subset \mathbb{R}^n$  on désigne par  $\text{conv}(F)$  (enveloppe convexe de  $E$ ) le plus petit convexe de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $F$ . C'est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de  $F$ .

Dans la définition 1.1.1 on peut considérer des enveloppes convexes de  $k$  points au lieu de prendre des segments :

**Définition 1.1.3** *On dit que  $E$  est  $k$ -convexe si pour tout point  $A_1, A_2 \dots A_k$  de  $E$  les points entiers de  $\text{conv}(A_1, \dots A_k)$  sont dans  $E$ .*

Une partie  $E$  de  $\mathbb{Z}^2$  est totalement convexe si et seulement si  $E = \text{conv}(E) \cap \mathbb{Z}^2$ . Or le théorème de Carathéodory ([Ber90, 11.1.8.6]) assure que tout point de l'enveloppe convexe d'une partie  $F \subset \mathbb{R}^n$  est en fait un barycentre à coefficients positifs de  $n + 1$  points de  $F$  on en déduit une équivalence entre la  $k$ -convexité et la convexité totale:

**Proposition 1.1.4** *Un ensemble  $E \subset \mathbb{Z}^n$  est totalement convexe si et seulement si il est  $n + 1$ -convexe.*

En particulier les totalement convexes de  $\mathbb{Z}^2$  sont les 3-convexes (les convexes par triangle)

Les points extrémaux d'un convexe  $F$  de  $\mathbb{R}^n$  sont les points  $M$  tels que  $F \setminus \{M\}$  est encore convexe. Si  $E$  est une partie de  $\mathbb{Z}^n$  alors les points extrémaux de  $\text{conv}(E)$  sont appelés sommets de  $E$ .

Le théorème de Krein-Millman ([Ber90, 11.6.8]) affirme que tout convexe compact  $K$  est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. On en déduit le fait suivant

**Proposition 1.1.5** *Toute partie totalement convexe de  $\mathbb{Z}^n$  finie est l'enveloppe convexe de ses sommets.*

Le calcul des sommets d'un ensemble fini de points est un problème classique de géométrie algorithmique (voir par exemple [Yao90, 3.] )

## 1.2 Connexité et convexité

### 1.2.1 Définitions

Voici des définitions très classiques de la géométrie discrète :

**Définition 1.2.1** – Deux points  $A, B \in \mathbb{Z}^2$  sont dits 4-adjacents si le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est dans  $V_4 = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$ .

– Deux points  $A, B \in \mathbb{Z}^2$  sont dits 6-adjacents si le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est dans  $V_6 = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (1, 1), (-1, -1)\}$ .

– Deux points  $A, B \in \mathbb{Z}^2$  sont dits 8-adjacents si le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est dans  $V_8 = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1)\}$ .

– Une partie  $E$  de  $\mathbb{Z}^2$  est dite  $k$ -connexe pour  $k = 4, 6, 8$  si pour tous points  $A$  et  $B$  de  $E$  il existe un  $k$ -chemin reliant  $A$  et  $B$ , c'est à dire une suite de points de  $E$  :  $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$  tels que  $M_i$  et  $M_{i+1}$  sont  $k$ -adjacents.

– Une partie HV-convexe est une partie de  $\mathbb{Z}^2$  dont l'intersection avec toute droite horizontale ou verticale est constituée de points consécutifs.

Une partie 4-connexe finie de  $\mathbb{Z}^2$  est aussi appelée polyomino.

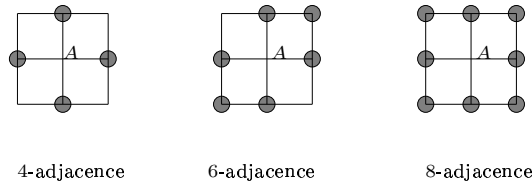


FIG. 1.2 – Les 3 types de connexité.

### 1.2.2 Liens connexité, 2-convexité, convexité totale dans $\mathbb{Z}^2$

Dans  $\mathbb{R}^n$  les ensembles convexes sont toujours connexes, car le segment  $[AB]$  est un chemin reliant  $A$  et  $B$ . Par contre dans  $\mathbb{Z}^2$  la convexité n'entraîne aucune des  $k$ -connexités (considérer  $E = \{(0,0), (2,1)\}$ )

Dans cette section on va montrer que si où on suppose la 8-connexité alors les deux convexités définies précédemment sont équivalentes.

**Théorème 1.2.2 (Kim)** *Soit  $E$  une partie de  $\mathbb{Z}^2$  alors les deux affirmations suivantes sont équivalentes :*

- *L'ensemble  $E$  est totalement convexe et 8-connexe.*
- *L'ensemble  $E$  est 2-convexe et 8-connexe.*

Ce théorème a été démontré pour la première fois dans [Kim81]. Une démonstration directe est faite dans [Ron85]. On va en donner une nouvelle preuve.

**Définition 1.2.3** *Soient  $v_1$  et  $v_2$  deux vecteurs de  $\mathbb{Z}^2$ . Une suite de points  $(M_i)$  est un chemin dirigé par  $(v_1, v_2)$  si pour tout  $i$  le vecteur  $\overrightarrow{M_i M_{i+1}}$  est l'un des trois vecteurs  $v_1$ ,  $v_2$  ou  $v_1 + v_2$ .*

Si  $v_1 \in \{(1,0), (-1,0)\}$  et  $v_2 \in \{(0,1), (0, -1)\}$  on parle de 8-chemin HV-monotone.

On va d'abord montrer quelques lemmes :

**Lemme 1.2.4** *Si  $E$  est une partie HV-convexe 8-connexe de  $\mathbb{Z}^2$  alors pour tous  $A, B$  de  $E$  il existe un 8-chemin HV-monotone reliant  $A$  à  $B$ .*

*Démonstration:* Considérons un 8-chemin reliant  $A$  à  $B$  comportant un nombre minimum de points. S'il n'est pas HV-monotone il existe trois points distincts  $M, N, P$  de ce chemin (et dans cet ordre) telles que l'on ait

$$y_M = y_P \neq y_N \text{ ou } x_M = x_P \neq x_N$$

On peut alors considérer le chemin où on remplace la portion entre  $M$  et  $P$  par le segment  $[M, P]$  qui est plus court que le chemin initial : contradiction.  $\square$

**Lemme 1.2.5** *Soit  $A(0,0)$  et  $B(a,b)$  deux points de  $\mathbb{Z}^2$  vérifiant  $0 < b < a$  et reliés par un 8-chemin HV-monotone  $\mathcal{C}$  au dessus de la droite  $(AB)$  et  $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ . Alors il existe un chemin  $\mathcal{C}'$  dirigé par  $(1,0), (q,1)$  reliant  $A$  et  $B$ , inclus dans l'enveloppe 2-convexe de  $\mathcal{C}$  et situé entre la droite  $(AB)$  et le chemin  $\mathcal{C}$ .*

Voir figure 1.3.

*Démonstration:* Le 8-chemin  $\mathcal{C}$  est HV-monotone, il est donc de la forme

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i=0}^b \{(x, i) : r_i \leq x \leq s_i\}$$

avec  $r_i \leq s_i$  et  $r_{i+1} \in \{s_i, s_i + 1\}$ . On va construire le chemin  $\mathcal{C}'$  sous la forme

$$\mathcal{C}' = \bigcup_{i=0}^b \{(x, i) : r'_i \leq x \leq s'_i\}.$$

On définit les suite  $(r'_i)$  et  $(s'_i)$  par récurrence :

- On prend  $r'_0 = r_0, s'_0 = s_0$ .



- Supposons avoir construit  $r'_j$  et  $s'_j$  pour tout  $j \leq i$  avec  $s'_i = s_i$ . Soit alors  $i' = \min\{j : q(j-i) + s_i \leq s_j\}$ , pour tout  $i < j < i'$  on prend  $r'_j = s'_j = q(j-i) + s_i$  et  $r'_{i'} = q(i'-i) + s_i, s'_{i'} = s_{i'}$ .
  - Si  $i' > i+1$  on a  $r'_{i'} = q(i'-1-i) + s_i > s_{i'-1} \geq r_{i'}$ .
  - Si  $i' = i+1$  on a  $r'_{i+1} = q + s_i \geq s_i + 1 \geq r_{i+1}$ .

Dans tous les cas on a  $r_{i'} \leq r'_{i'} \leq s'_{i'} = s_{i'}$ .

Ce processus définit donc le chemin  $C'$  qui par construction est inclus dans l'enveloppe 2-convexe de  $C$  et est  $(1,0),(q,1)$ -convexe.  $\square$

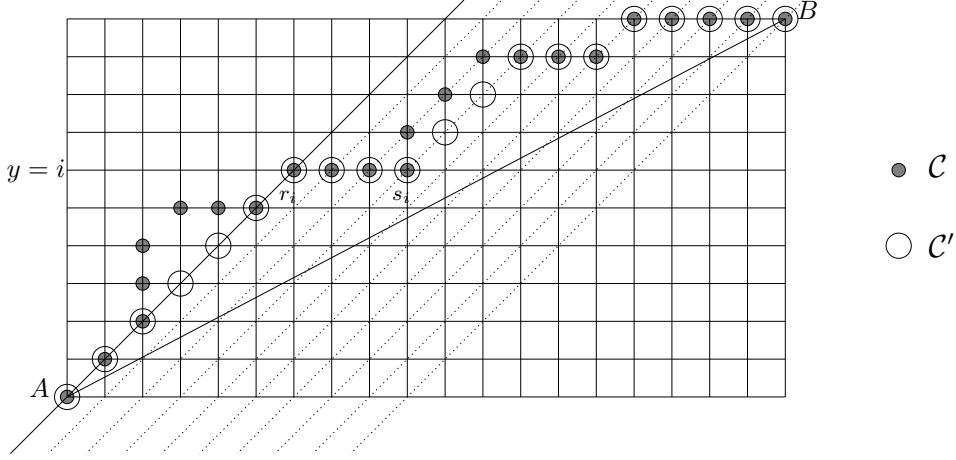


FIG. 1.3 – Construction du chemin  $C'$

On en déduit le fait suivant :

**Lemme 1.2.6** Soit  $A(0,0)$  et  $B(a,b)$  deux points de  $\mathbb{Z}^2$  reliés par un 8-chemin 8-connexe HV-monotone  $C$  au dessus de la droite  $(AB)$ . Alors l'ensemble des points de l'enveloppe totalement convexe de  $C$  situés entre  $(AB)$  et  $C$  est dans l'enveloppe 2-convexe de  $C$ .

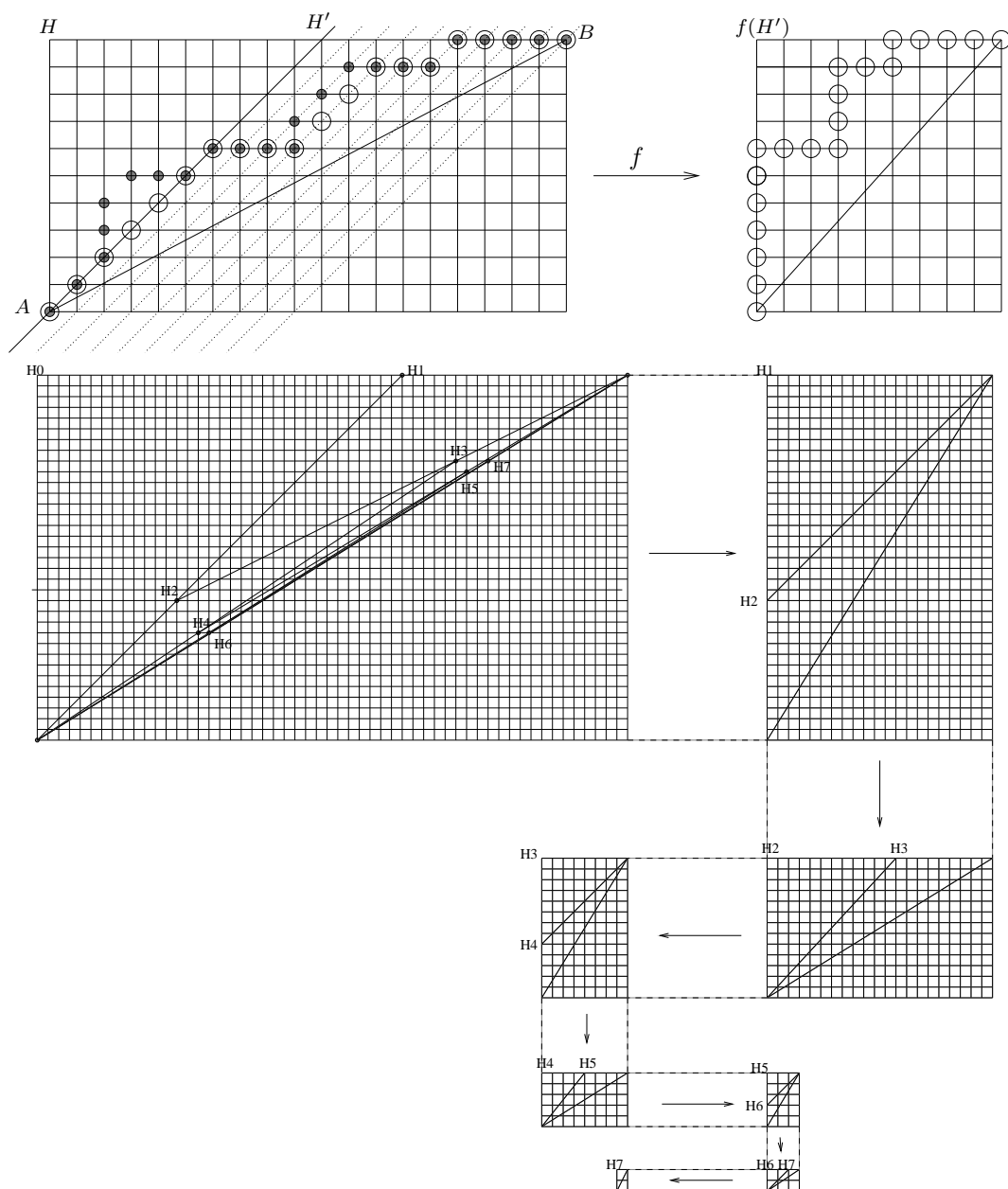
*Démonstration:* On va montrer le résultat par récurrence sur  $\max(a,b)$ . On peut supposer  $0 < b < a$ . Soit alors  $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$  et considérons le chemin  $C'$  donné par le lemme précédent.

Considérons la transformation affine suivante :

$$f : (x,y) \mapsto (x - qy, y)$$

Les points  $f(A) = (0,0)$  et  $f(B) = (a \bmod b, b)$  sont reliés par le chemin  $f(C')$ . Ce chemin est HV-convexe 4-connexe, d'après les propriétés de  $C'$  on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à ce chemin. Donc les points entre  $C'$  et  $(AB)$  sont bien dans l'enveloppe 2-convexe de  $C$ . Les points entre  $C$  et  $C'$  sont aussi dans l'enveloppe 2-convexe de  $C$  par H-convexité. (voir figure 1.4)  $\square$

En fait on effectue l'algorithme d'Euclide entre les deux coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ . Dans la figure 1.4 sont données par exemple toutes les transformations nécessaires pour le vecteur  $(55,34)$ .

FIG. 1.4 – Pourquoi les points au dessus de  $A$  et  $B$  sont-ils dans  $E$ ?

Considérons maintenant une partie  $E$  2-convexe, 8-connexe *finie* de  $\mathbb{Z}^2$ . Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des sommets de l'enveloppe convexe de  $E$ . On peut partager  $\mathcal{S}$  en  $\mathcal{S}_g$  et  $\mathcal{S}_d$  ensembles des sommets qui sont respectivement sur le bord gauche et sur le bord droit de  $\text{conv}E$ , précisément :

$$\mathcal{S}_d = \{(x,y) \in \mathcal{S} : (t,y) \in \text{conv}E \Rightarrow t \leq x\}$$

$$\mathcal{S}_g = \{(x,y) \in \mathcal{S} : (t,y) \in \text{conv}E \Rightarrow t \geq x\}$$

Soit  $(S_i)$  (resp  $(T_i)$ ) la suite des points de  $\mathcal{S}_d$  (resp  $\mathcal{S}_g$ ) ordonnée par deuxième coordonnée croissante.

**Lemme 1.2.7** *Soit  $E$  une partie finie totalement convexe 8-connexe de  $\mathbb{Z}^2$  et soient  $(S_i), (T_i)$  définies comme plus haut. Considérons des 8-chemins HV-monotones  $\mathcal{C}_i$  entre  $S_i$  et  $S_{i+1}$  et  $\mathcal{C}'_i$  entre  $T_i$  et  $T_{i+1}$ . Soit  $M$  un point de l'enveloppe totalement convexe de  $E$  alors au moins l'une de des trois alternatives est vraie*

- Le point  $M$  est situé entre un chemin  $\mathcal{C}_i$  et la droite  $(S_i S_{i+1})$ ;
- Le point  $M$  est situé entre un chemin  $\mathcal{C}'_i$  et la droite  $(T_i T_{i+1})$ ;
- Il existe  $i$  et  $j$  et deux points  $U \in \mathcal{C}_i$  et  $V \in \mathcal{C}'_j$  horizontalement alignés tels que  $M$  est sur le segment  $[U, V]$

(voir figure 1.5)

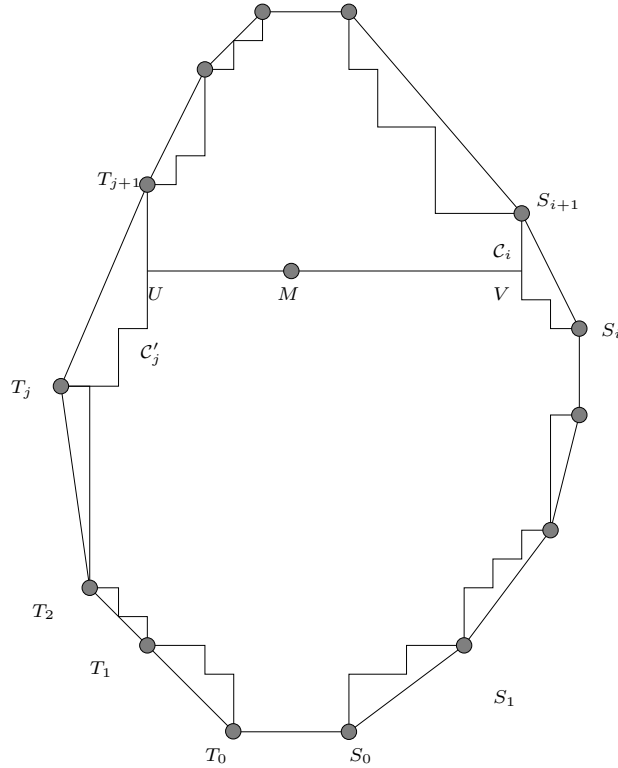


FIG. 1.5 – Pourquoi tous les points de  $\text{conv}\{S_i, T_i\}$  sont-ils dans  $E$  ?

*Démonstration:* Supposons donc que les deux premières alternatives sont fausses. Soit alors  $i$  et  $j$  tels que :

$$y_{S_i} \leq y_M \leq y_{S_{i+1}} \quad y_{T_j} \leq y_M \leq y_{T_{j+1}}$$

Soit  $U$  un point de  $\mathcal{C}_i$  d'ordonnée  $y_M$  et  $V$  un point de  $\mathcal{C}'_j$  d'ordonnée  $y_M$  (ces points existent car les chemins sont 8-connexes). Comme les deux premières alternatives sont fausses on a forcément

$$x_U \leq x_M \leq x_V$$

d'où le résultat.  $\square$

*Démonstration du théorème 1.2.2:* Soit  $E$  un ensemble 2-convexe et 8-connexe.

Si  $E$  est fini d'après les lemmes 1.2.7 et 1.2.6 tout point  $M$  de  $\text{conv}E \cap \mathbb{Z}^2$  est en fait dans  $E$  et donc  $E$  est bien totalement convexe.

Considérons maintenant le cas où  $E$  est *infini*.

Soit  $M \in \text{conv}E \cap \mathbb{Z}^2$ . Le point  $M$  est donc un barycentre (à coefficient positifs) d'un ensemble fini  $F$  de points de  $E$ . Considérons alors un rectangle  $R = [a, b] \times [c, d]$  contenant  $F$ . L'ensemble  $E' = E \cap R$  est un ensemble fini, 2-convexe car  $R$  est 2-convexe. Il est 8-connexe à cause du lemme 1.2.4. D'après ce qui précède  $E'$  est totalement convexe et donc le point  $M$  est bien dans  $E' \subset E$ .  $\square$

### 1.2.3 Et dans $\mathbb{Z}^3$ ?

Dans  $\mathbb{Z}^3$  deux points  $A, B$  sont dits 6-adjacents (*resp* 18-adjacents, 26-adjacents) si  $\overrightarrow{AB}$  est dans  $V_6 = \{(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)\}$  (*resp*  $V_{18} = V_6 \cup \{(\pm 1, \pm 1, 0), (0, \pm 1, \pm 1), (\pm 1, 0, \pm 1)\}$ ,  $V_{26} = V_{18} \cup \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$ )

Ces adjacences permettent de définir la  $k$ -connexité pour  $k \in \{6, 18, 26\}$ .

Le théorème précédent ne se généralise pas facilement à  $\mathbb{Z}^3$  :

**Proposition 1.2.8** *Il existe une partie  $E$  de  $\mathbb{Z}^3$  6-connexe, 2-convexe mais qui n'est pas 3-convexe.*

Pour avoir un contre-exemple il suffit en fait de superposer un totalement convexe 4-connexe de  $\mathbb{Z}^2$  avec un 2-convexe non totalement convexe. (voir figure 1.6)

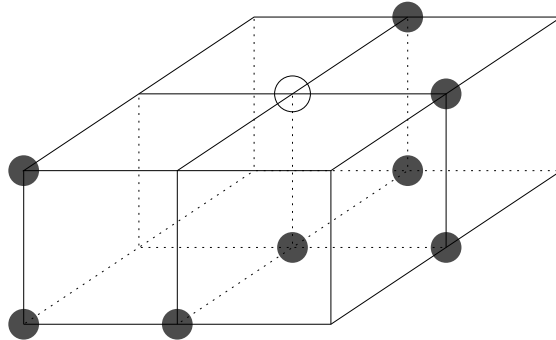


FIG. 1.6 – Une partie de  $\mathbb{Z}^3$  6-connexe, 2-convexe mais qui n'est pas 3-convexe

**Proposition 1.2.9** *Il existe une partie  $E$  de  $\mathbb{Z}^3$  18-connexe, 3-convexe mais qui n'est pas 4-convexe.*

Le contre exemple est donné à la figure 1.7.

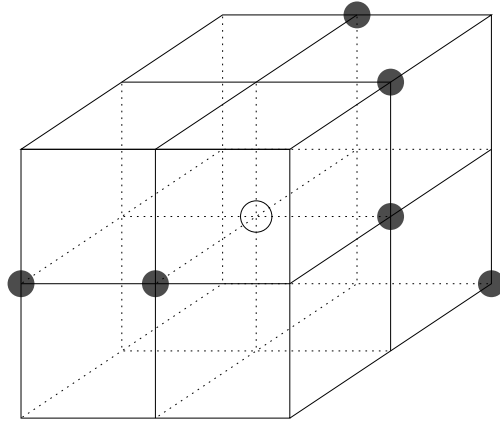


FIG. 1.7 – Une partie de  $\mathbb{Z}^3$  18-connexe, 3-convexe mais qui n'est pas 4-convexe

Par contre la question suivante reste ouverte :

**Question 1** *Existe-t-il une partie  $E$  de  $\mathbb{Z}^3$  6-connexe et 3-convexe mais non 4-convexe ?*

Expérimentalement la réponse a l'air non, en effet sur 240000 3-convexes 6-connexes tirés au hasard dans le cube  $\{0, \dots, 3\}^3$  aucun n'est 4-convexe.

# Chapitre 2

## La Q-convexité

Dans le chapitre précédent on s'est intéressé à la convexité discrète la plus proche de celle définie par les géomètres. Mais il existe une autre classe très importante de convexité : celle des polyominos HV-convexes. Par exemple en combinatoire on ne sait pas compter efficacement les polyominos ayant un nombre de points donnés (c'est une des grandes questions de ce domaine) mais on sait compter les polyominos HV-convexes ([BMF95]).

En tomographie discrète il se produit à peu près la même situation : il n'y a pas d'algorithme polynomial (sauf si  $P=NP$ ) pour reconstruire des polyominos à partir du nombre de points dans chaque horizontale et dans chaque verticale ([Woe96]), par contre c'est possible si on reconstruit des polyominos HV-convexes ([BDLNP96]). (Cette reconstruction sera détaillée dans la deuxième partie.)

Malheureusement la classe des polyominos HV-convexes ne s'étend pas facilement à des directions quelconques. Le but de ce chapitre est de donner une notion proche des polyominos HV-convexes mais définie pour deux directions quelconques.

### 2.1 Directions dans $\mathbb{Z}^2$

Une direction peut être donnée soit par un vecteur  $\vec{p}$ , soit par une forme linéaire  $p$ . La forme linéaire  $p = ax + by$  et le vecteur  $\vec{p} = (-b, a)$  représentent la même direction. Si  $a$  et  $b$  sont rationnels on dit que la direction est rationnelle. Dans ce cas on peut prendre  $a$  et  $b$  entiers et premiers entre eux.

#### 2.1.1 Sous-réseaux liés à deux directions

On se donne donc deux directions distinctes  $p = ax + by$  et  $q = cx + dy$  avec  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ ,  $\text{pgcd}(c, d) = 1$ .

Le déterminant des deux directions  $\det(p, q) = ad - bc$  est noté  $\delta$ . Les deux directions sont différentes donc  $\delta \neq 0$ . Quitte à changer  $(a, b)$  en  $(-a, -b)$  on peut supposer  $\delta > 0$ . On note  $\vec{p} = (-b, a)$  et  $\vec{q} = (d, -c)$  les vecteurs associés aux directions, on a  $q(\vec{p}) = p(\vec{q}) = \delta$ .

On note  $\langle i, j \rangle_{p, q}$  (et même  $\langle i, j \rangle$  en l'absence d'ambiguïté) le point  $M \in \mathbb{Q}^2$  tel que  $p(M) = i$  et  $q(M) = j$ . Si  $\delta \neq 1$  alors ce point n'est pas forcément dans  $\mathbb{Z}^2$  (voir figure 2.1)

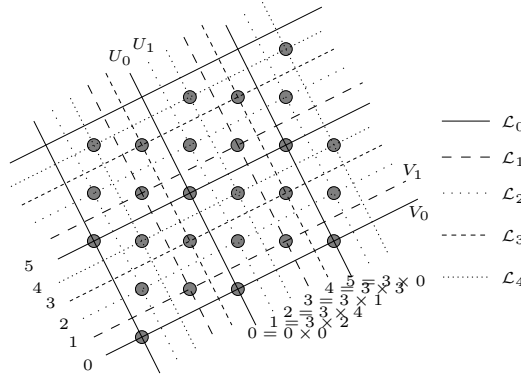


FIG. 2.1 – Le réseau  $\mathbb{Z}^2$  avec les droites de direction  $p = 2x + y$  et  $q = x - 2y$ .

Plus précisément on a la proposition suivante :

**Proposition 2.1.1** *Le point  $\langle i, j \rangle$  est dans  $\mathbb{Z}^2$  si et seulement si  $j \equiv \kappa i \pmod{\delta}$  où  $\kappa$  est un entier premier avec  $\delta$  ne dépendant que de  $p$  et  $q$ .*

*Démonstration:* Le point  $\langle i, j \rangle$  est dans  $\mathbb{Z}^2$  si et seulement si le système :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

a une solution dans  $\mathbb{Z}^2$ .

Les entiers  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux donc il existe  $u$  et  $v$  tels que  $ua + vb = 1$ . On a alors l'égalité de matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & -b \\ v & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \kappa & \delta \end{pmatrix}$$

où  $\kappa = cu + dv$ .

La matrice  $M = \begin{pmatrix} u & -b \\ v & a \end{pmatrix}$  est unimodulaire donc on peut faire le changement de variable  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  dans (2.1) qui devient

$$X = i, \quad \kappa X + \delta Y = j$$

qui a une solution si et seulement si  $\frac{j - \kappa i}{\delta} \in \mathbb{Z}$ . □

On peut aisément généraliser ce résultat à la dimension  $n$  il faut alors mettre la matrice de présentation des  $n$  directions sous forme de Hermite.

La proposition précédente montre donc que  $\mathbb{Z}^2$  est la réunion de  $\delta$  sous-réseaux  $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{\delta-1}$  définis par

$$\mathcal{L}_l = \{M \in \mathbb{Z}^2 \mid q(M) \equiv \kappa p(M) \equiv l \pmod{\delta}\}.$$

Chaque droite  $p = i$  ou  $q = j$  est dans un seul réseau et ces droites ne se coupent dans  $\mathbb{Z}^2$  que si elles sont dans le même réseau. Donc en fait chaque sous-réseau « ressemble » à  $\mathbb{Z}^2$  avec les directions horizontales et verticales.

Par exemple dans le cas de la figure 2.1,  $\mathbb{Z}^2$  est la réunion de 5 sous-réseaux.

## 2.2 Convexité simple

**Définition 2.2.1** Une partie  $E$  de  $\mathbb{Z}^2$  est convexe simple selon la direction  $p$  si pour tous points  $A$  et  $B$  tels que  $(AB)$  est parallèle à  $p$  les points entiers du segment  $[AB]$  sont dans  $E$ .

En particulier les HV-convexes sont les convexes simples selon les directions  $x$  et  $y$ . Les 2-convexes sont les ensembles qui sont convexes simples selon toutes les directions rationnelles.

L'intersection de deux convexes simples étant convexe simple, on peut définir l'enveloppe convexe simple.

Si on prend un ensemble de quelques points tirés au hasard, et une direction  $p$  il y a de fortes chances pour que les droites de direction  $p$  passent par un seul point, et donc que l'ensemble considéré soit convexe simple selon  $p$ . La convexité simple est donc une propriété assez faible.

Un autre inconvénient de la convexité simple est que la convexité simple selon plusieurs direction ne vérifie pas un analogue de la proposition 1.1.5. Considérons l'ensemble  $E$  de la figure 2.2. Il est HV-convexe fini. Les points entourés sont les points qui ne sont pas dans l'enveloppe HV-convexe des autres points, ce sont les analogues des sommets pour les HV-convexes. Mais l'ensemble  $E$  n'est pas égal à l'enveloppe HV-convexe de ces points, puisque ces points forment eux-mêmes un ensemble HV-convexe.

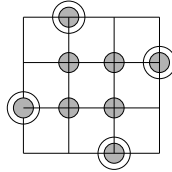


FIG. 2.2 – Un ensemble HV-convexe qui n'est pas l'enveloppe HV-convexe d'un ensemble minimum de points

## 2.3 Q-convexité

Dans cette section et la section suivante on se fixe deux directions rationnelles  $p$  et  $q$  de la forme  $p = ax + by$ ,  $q = cx + dy$  avec  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ ,  $\text{pgcd}(c, d) = 1$ .

Pour tout  $M \in \mathbb{Q}^2$  on définit les quatre quadrants autour de  $M$  par :

$$R_0^{pq}(M) = \{N \in \mathbb{Z}^2 / p(N) \leq p(M) \text{ et } q(N) \leq q(M)\}$$

$$R_1^{pq}(M) = \{N \in \mathbb{Z}^2 / p(N) \geq p(M) \text{ et } q(N) \leq q(M)\}$$

$$R_2^{pq}(M) = \{N \in \mathbb{Z}^2 / p(N) \geq p(M) \text{ et } q(N) \geq q(M)\}$$

$$R_3^{pq}(M) = \{N \in \mathbb{Z}^2 / p(N) \leq p(M) \text{ et } q(N) \geq q(M)\}$$

L'indice  $i$  de  $R_i^{pq}(M)$  est en fait dans  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  de sorte que  $R_4^{pq}(M) = R_0^{pq}(M)$ . Lorsque qu'il n'y a pas ambiguïté, ces quadrants sont notés simplement  $R_i$ . On peut alors définir la



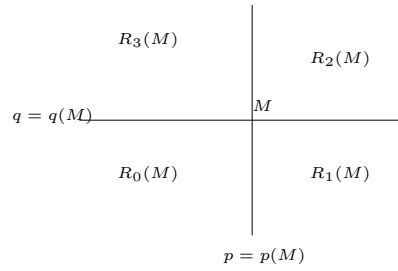


FIG. 2.3 – Les 4 quadrants

Q-convexité :

**Définition 2.3.1** Une partie  $E$  de  $\mathbb{Z}^2$  est Q-convexe (convexe par quadrant) selon  $p$  et  $q$  si

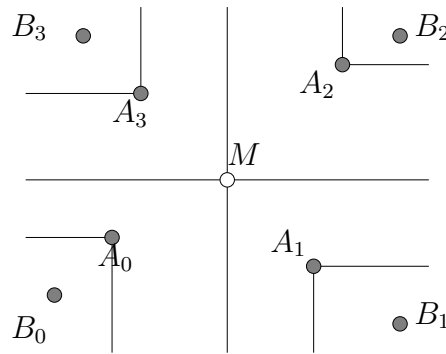
$$(\forall i R_i(M) \cap E \neq \emptyset) \implies M \in E.$$

En particulier la classe des Q-convexes selon  $p$  et  $q$  est une sous-classe des convexes simples selon  $p$  et selon  $q$ . L'intersection de deux Q-convexes est encore Q-convexe, on peut donc définir l'enveloppe Q-convexe d'une partie  $E$  de  $\mathbb{Z}^2$ . On désigne cette enveloppe par  $QCONV_{pq}(E)$ . L'enveloppe Q-convexe se caractérise en fait plus simplement :

**Proposition 2.3.2** Si  $E$  est une partie de  $\mathbb{Z}^2$  alors  $QCONV_{pq}(E)$  est l'ensemble

$$QCONV_{pq}(E) = \{M \in \mathbb{Z}^2 \mid \forall i R_i^{pq}(M) \cap E \neq \emptyset\}$$

*Démonstration:* Soit  $F = \{M \in \mathbb{Z}^2 \mid \forall i R_i^{pq}(M) \cap E \neq \emptyset\}$ . D'après la définition on a  $F \subset QCONV_{pq}(E)$ . Pour avoir l'inclusion inverse il suffit de vérifier que  $F$  est Q-convexe. Soit  $M \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $\forall i R_i^{pq}(M) \cap F \neq \emptyset$ . Soit  $A_i \in R_i^{pq}(M) \cap F$ . D'après la définition de  $F$  il existe  $B_i$  tel que  $B_i \in R_i^{pq}(A_i) \cap E$ . Comme  $R_i^{pq}(A_i) \subset R_i^{pq}(M)$  on sait que  $M \in E$  et donc  $E$  est Q-convexe. (voir figure 2.4)  $\square$

FIG. 2.4 – Pourquoi  $\{M \in \mathbb{Z}^2 : \forall i R_i(M) \cap E \neq \emptyset\}$  est Q-convexe ?

Ceci donne un algorithme très simple pour calculer l'enveloppe Q-convexe d'un ensemble fini de points :

On considère d'abord le « parallélogramme »

$$\Delta = \{\langle i, j \rangle \in \mathbb{Q}^2 : i, j \in \mathbb{Z}, \min_{M \in E} p(M) \leq i \leq \max_{M \in E} p(M), \min_{M \in E} q(M) \leq j \leq \max_{M \in E} q(M)\}$$

On peut alors calculer le tableau de booléens  $(V_0(M))_{M \in \Delta}$  signifiant  $V_0(M) = "R_0(M) \cap E \neq \emptyset"$  grâce à la récurrence :

$$V_0(\langle i, j \rangle) = V_0(\langle i-1, j \rangle) \vee V_0(\langle i, j-1 \rangle) \vee "\langle i, j \rangle \in E"$$

De même on peut calculer les tableaux  $V_1(M), V_2(M), V_3(M)$ . L'enveloppe convexe de  $E$  est alors :

$$QCONV_{pq}(E) = \{M \in \Delta \cap \mathbb{Z}^2 : V_0(M) \wedge V_1(M) \wedge V_2(M) \wedge V_3(M)\}.$$

On a donc un algorithme linéaire d'enveloppe Q-convexe en fonction du nombre de points de  $\Delta$ .

## 2.4 Points saillants

### 2.4.1 Définitions et premières propriétés

Les points saillants sont les équivalents des sommets pour les Q-convexes.

**Définition 2.4.1** *Un point  $M$  d'une partie  $E$  de  $\mathbb{Z}^2$  est un point  $(p, q)$ -saillant, si  $M \notin QCONV_{pq}(E \setminus \{M\})$ . En l'absence d'ambiguïté sur les directions on parlera simplement de point saillant.*

**Lemme 2.4.2** *Un point  $M$  est un point saillant de  $E$  si et seulement si il existe  $i$  tel que  $R_i(M) \cap E = \{M\}$ .*

*Démonstration:* D'après la proposition 2.3.2 on sait que  $M \notin QCONV_{pq}(E \setminus \{M\})$  si et seulement si il existe  $i$  tel que  $(E \setminus \{M\}) \cap R_i(M) = \emptyset$ .  $\square$

On a ainsi un énoncé similaire à la proposition 1.1.5 :

**Proposition 2.4.3** *Tout Q-convexe fini est l'enveloppe Q-convexe de ses points saillants.*

*Démonstration:* Soit  $E$  une partie Q-convexe de  $\mathbb{Z}^2$ , et  $M \in E$ . Il faut montrer que chaque quadrant autour de  $M$  contient un point saillant de  $E$ .

Considérons par exemple le quadrant  $R_0(M)$ . Soit donc  $N$  le point de  $E \cap R_0(M)$  qui minimise  $(p(N), q(N))$  dans l'ordre lexicographique. (Ce point existe car  $E$  est fini) Le point  $M$  vérifie  $R_0(M) \cap E = \{M\}$  et donc  $M$  est un point saillant.  $\square$

Cette proposition est importante car elle montre qu'il y a une bijection entre les ensembles finis de points saillants et les Q-convexes finis.

Avec la proposition 2.3.2 on en déduit :

**Corollaire 2.4.4** *Si  $S$  est l'ensemble des points saillants d'une partie finie de  $\mathbb{Z}^2$  alors pour tout  $i \in \{0 \dots 3\}$ , et  $M \in \mathbb{Z}^2$  on a :*

$$S \cap R_i(M) = \emptyset \iff E \cap R_i(M) = \emptyset$$

*Démonstration:* Le sens  $\Leftarrow$  est clair. Montrons le sens  $\Rightarrow$ : soit  $M$  un point tel que  $S \cap R_i(M) = \emptyset$  pour un  $i$  donné et  $N$  un point de  $R_i(M)$ . Comme  $R_i(N) \subset R_i(M)$  on a  $R_i(N) \cap S = \emptyset$ . D'après la proposition 2.3.2  $N$  n'est donc pas dans l'enveloppe convexe de  $S$ , qui d'après la proposition 2.4.3 est égale à  $E$ . Donc  $N \notin E$  pour tout  $N \in R_i(M)$  ie  $R_i(M) \cap E = \emptyset$ .  $\square$

**Proposition 2.4.5** *Un ensemble  $S$  est un ensemble de points saillants d'un  $Q$ -convexe si et seulement si pour tout  $M$  de  $S$  il existe  $i$  tel que  $S \cap R_i(M) = \{M\}$ .*

*Démonstration:*

$\Rightarrow$  C'est une conséquence du lemme 2.4.2.

$\Leftarrow$  Considérons un ensemble  $S$  comme dans la proposition. Soit  $E = QCONV_{pq}(S)$ . Montrons que  $S$  est l'ensemble des points saillants de  $E$ . D'après la proposition 2.3.2 on a

$$E = \{M \in \mathbb{Z}^2 \mid \forall i R_i^{pq}(M) \cap S \neq \emptyset\} \quad (2.2)$$

Si  $M \in S$  alors il existe  $i$  tel que  $R_i(M) \cap S = \{M\}$ , et donc pour tout  $N \in R_i(M) \setminus \{M\}$  on a  $R_i(N) \cap S = \emptyset$  et donc d'après (2.2) on a  $N \notin E$ , on en déduit que  $M$  est un point saillant de  $E$ . Réciproquement si  $M$  est un point saillant de  $E$  il existe  $i$  tel que  $R_i(M) \cap E = \{M\}$  or d'après (2.2)  $R_i(M) \cap S \neq \emptyset$  et donc

$$\{M\} = R_i(M) \cap E \supset R_i(M) \cap S \neq \emptyset$$

et donc  $M \in S$ .  $\square$

## 2.4.2 Consécutivité des saillants

Dans toute ce paragraphe  $E$  désigne une partie finie de  $\mathbb{Z}^2$   $Q$ -convexe selon  $(p,q)$ , et  $S$  l'ensemble de ses points saillants.

**Définition 2.4.6** *Un saillant quadré est un couple  $(M,i)$  où  $M$  est un point saillant de  $E$  et  $i \in \{0, \dots, 3\}$  est tel que  $R_i(M) \cap E = \{M\}$ . Si  $M$  est un point saillant alors le nombre de points quadrés  $(M,i)$  est appelée multiplicité du point saillant.*

La définition des points saillants entraîne que tout point saillant  $M$  peut être vu comme un point quadré  $(M,i)$  mais ce point quadré n'est pas forcément unique, par exemple si  $p = x, q = y, E = \{(0,0), (1,0)\}$  alors au point  $(0,0)$  on peut associer les trois points quadrés  $((0,0),i)$  où  $i \neq 2$ . Notons  $S'$  l'ensemble des points saillants quadrés de  $E$ .

**Définition 2.4.7** *Deux saillants quadrés  $(A,i)$  et  $(B,j)$  sont consécutifs si on a une des six conditions*

- $i = j = 0$  et  $R_0(N) \cap E = \emptyset$  où  $N = \langle \max(p(A), p(B)) - 1, \max(q(A), q(B)) - 1 \rangle$ .
- $i = j = 1$  et  $R_1(N) \cap E = \emptyset$  où  $N = \langle \min(p(A), p(B)) + 1, \max(q(A), q(B)) - 1 \rangle$ .
- $i = j = 2$  et  $R_2(N) \cap E = \emptyset$  où  $N = \langle \min(p(A), p(B)) + 1, \min(q(A), q(B)) + 1 \rangle$ .
- $i = j = 3$  et  $R_3(N) \cap E = \emptyset$  où  $N = \langle \max(p(A), p(B)) - 1, \min(q(A), q(B)) + 1 \rangle$ .
- $\{i,j\} = \{0,1\}$  ou  $\{i,j\} = \{2,3\}$  et  $q(A) = q(B)$  et  $E$  est inclus dans un demi-plan de frontière  $q = q(A)$ .

- $\{i,j\} = \{1,2\}$  ou  $\{i,j\} = \{3,0\}$  et  $p(A) = p(B)$  et  $E$  est inclus dans un demi-plan de frontière  $p = p(A)$ .

Dans ce cas on note  $ACONSB$ .

Si on a l'une des deux dernières conditions on dit que  $[AB]$  est un *ped* de  $E$ .

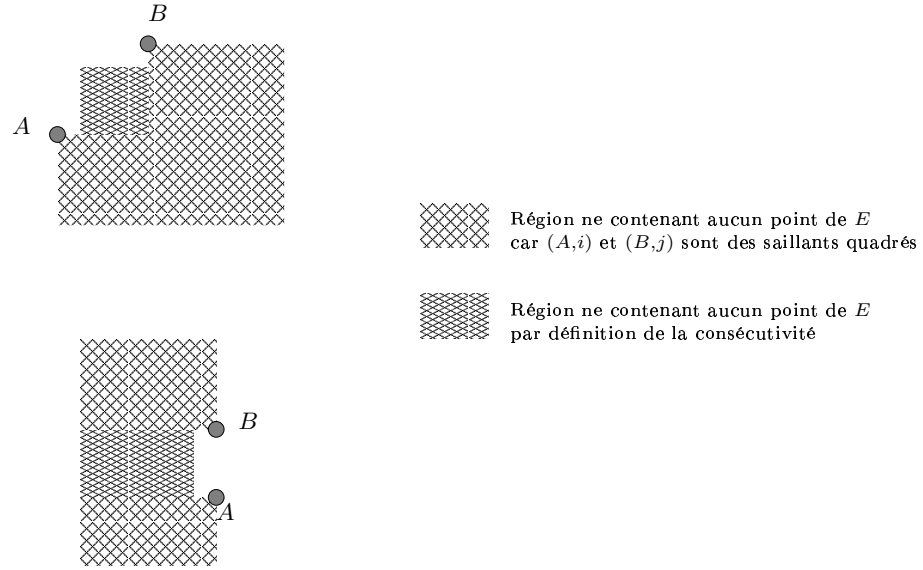


FIG. 2.5 – Les deux cas de consécuité à rotation près

On a donc muni  $S'$  d'une structure de graphe. Par exemple si on considère les directions  $p = x$  et  $q = y$  et l'ensemble  $E$  de la figure 2.6 alors les seules relations de consécuité sont :

$$(A,0)CONS(A,1)CONS(C,1)CONS(D,1)CONS(E,2)CONS(E,3)CONS(C,3)CONS(B,3)CONS(A,0)$$

La relation CONS définit donc un cycle sur  $S'$ . En fait c'est vrai en général.

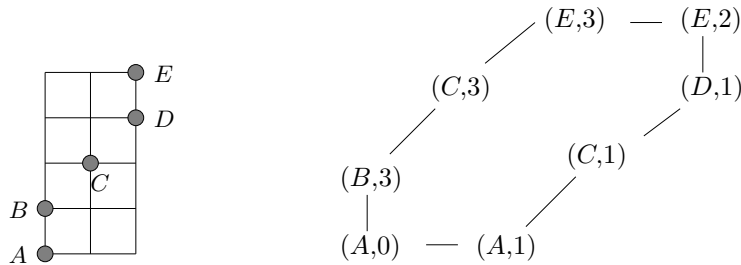


FIG. 2.6 – Un ensemble  $E$   $Q$ -convexe selon  $p = x$  et  $q = y$  et son cycle des points saillants quadrés. (Dans cet exemple tous les points de  $E$  sont saillants)

**Proposition 2.4.8** *Le graphe  $(S', CONS)$  est un cycle.*

*Démonstration:* Considérons les 4 ensembles  $S_i = \{M : (M, i) \in S'\}$ .

On peut mettre  $S_0$  sous la forme  $S_0 = \{M_1, \dots, M_n\}$  avec  $p(M_1) < p(M_2) < \dots < p(M_n)$ . On a alors forcément  $q(M_1) > \dots > q(M_n)$ . Si il y avait un point dans  $R_0(\langle p(M_{i+1}) - 1, q(M_i) - 1 \rangle)$  alors ce point serait dans  $S_0$  ce qui est impossible donc  $M_i \text{CONS} M_{i+1}$ . De plus  $M_i \text{CONS} M_j$  est impossible dès que  $|i - j| > 2$ , car  $M_k$  où  $i < k < j$  est dans  $R_0(\langle p(M_j) - 1, q(M_i) - 1 \rangle)$ . Donc on a prouvé que :

$$(M_i, 0) \text{CONS} (M_j, 0) \text{ ssi } |j - i| = 1.$$

Le graphe  $(S_0, \text{CONS})$  est donc une chaîne. De même façon on peut montrer que les graphes  $(S_1, \text{CONS})$ ,  $(S_2, \text{CONS})$  et  $(S_3, \text{CONS})$  sont des chaînes.

Cherchons maintenant les points consécutifs aux points de  $S_0$  qui ne sont pas eux-mêmes dans  $S_0$ . Si  $1 < i < n$  alors  $M_i$  n'a aucun point consécutif n'appartenant pas à  $S_0$  car  $E$  ne peut pas être contenu dans un demi-plan de frontière  $p = p(M_i)$  ou  $q = q(M_i)$ .

Pour  $i = 1$  on sait que  $M_1$  est le point qui minimise  $(p, q)$  pour l'ordre lexicographique. Soit  $N$  le point qui minimise  $(p, -q)$  pour l'ordre lexicographique, le point  $N$  est forcément dans  $S_3$ . Les points de  $S$  sur la droite  $p = p(M_1)$  sont exactement  $M_1$  et  $N$ . Donc les seuls points quadrés consécutifs à  $(M_1, 0)$  sont  $(M_2, 0)$  et  $(N, 3)$ .

Finalement on peut montrer qu'il n'y a qu'une seule consécuité entre  $S_0$  et  $S_1$ , une seule entre  $S_1$  et  $S_2$  et une seule entre  $S_2$  et  $S_3$  et que ces consécuités se font entre points extrémaux des chaînes  $S_i$ . On en déduit donc que le graphe  $(S', \text{CONS})$  est bien un cycle. (voir figure 2.7.)  $\square$

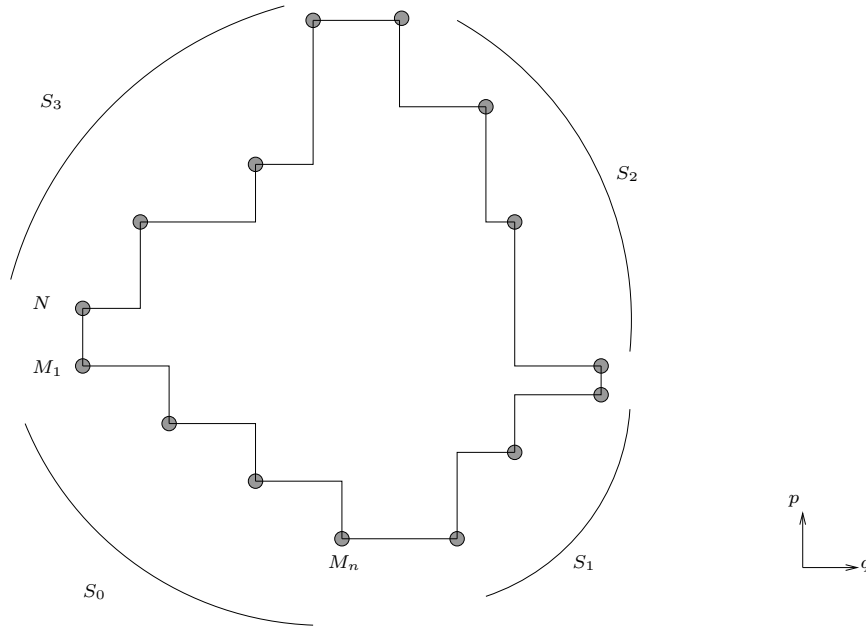
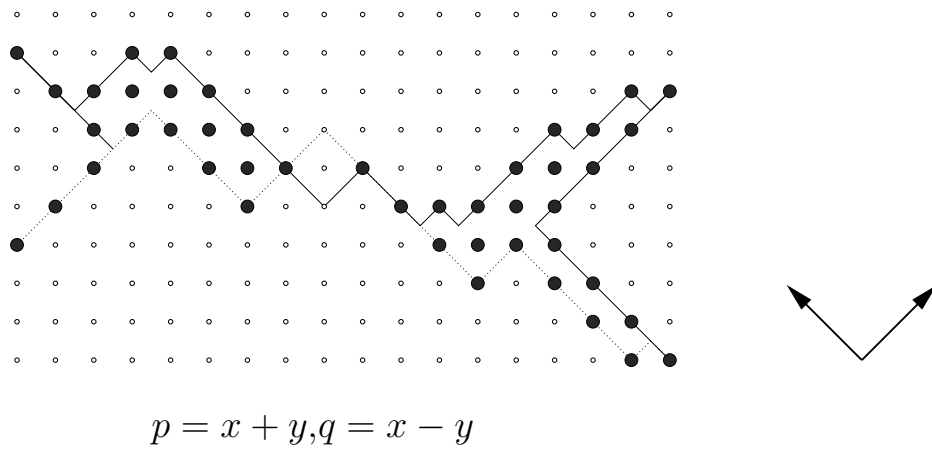
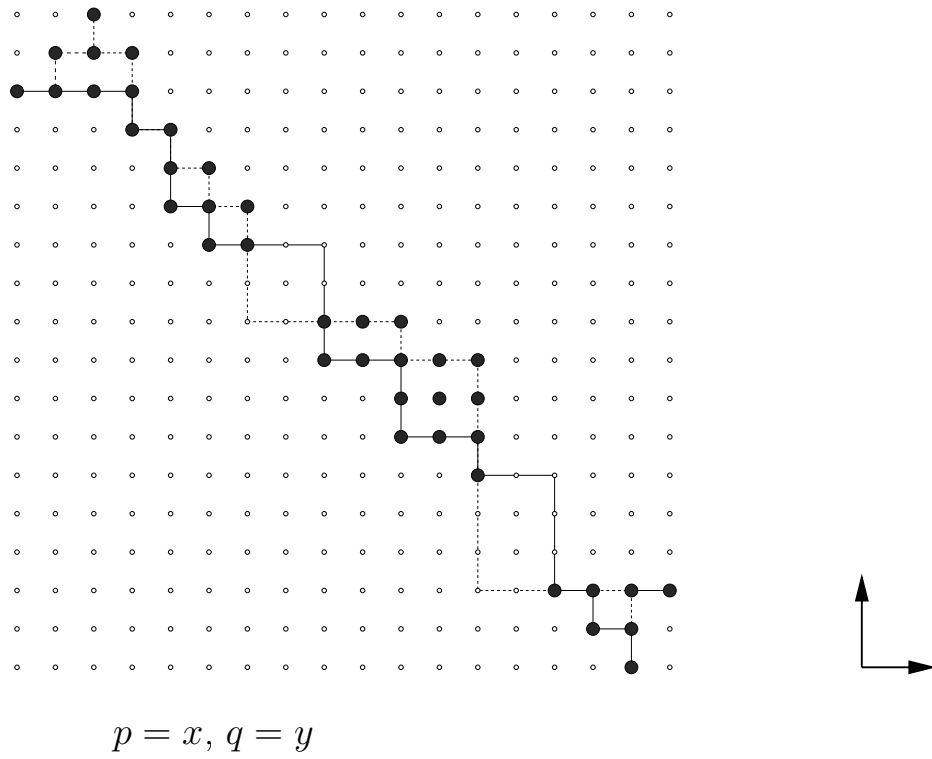


FIG. 2.7 – Points saillants d'un  $Q$ -convexe

FIG. 2.8 – Deux exemples de  $Q$ -convexes

## 2.5 Liens avec la connexité

Comme pour la convexité totale, la Q-convexité n'entraîne aucune des connexités discrètes. (voir figure 2.8) Dans cette section on va chercher les conditions pour qu'un Q-convexe ait aussi des propriétés de connexité.

### 2.5.1 L'insécabilité

Dans le premier exemple de la figure 2.8, on peut remarquer des droites horizontales ou verticales qui ne contiennent aucun point de l'ensemble. Les ensembles insécables n'auront pas cette propriété.

**Définition 2.5.1** Soit  $E$  une partie de  $\mathbb{Z}^2$ ,  $p$  une direction,  $pmin = \inf\{p(M) / M \in E\}$  et  $pmax = \sup\{p(M) / M \in E\}$ . On dit que  $E$  est insécable dans la direction  $p$  si pour tout  $i$  tel que  $pmin \leq i \leq pmax$  la droite  $p = i$  contient au moins un point de  $E$ .

Les ensembles connexes sont toujours insécables dans certaines directions :

**Proposition 2.5.2** – Si  $E$  est 8-connexe alors il est insécable pour les directions  $x, y$ .  
– Si  $E$  est 6-connexe alors il est insécable pour les directions  $x, y, x - y$   
– Si  $E$  est 4-connexe alors il est insécable pour les directions  $x, y, x + y, x - y$ .

*Démonstration:* Démontrons la première affirmation avec la direction  $p = x$ . Soit  $xmin = \inf\{p(M) / M \in E\}$ ,  $xmax = \sup\{p(M) / M \in E\}$  et une droite  $D$  d'équation  $x = x_0$  avec  $xmin \leq x_0 \leq xmax$ . L'ensemble  $\mathbb{Z}^2 \setminus D$  a deux composantes 8-connexes qui contiennent chacune des points de  $E$ , donc  $E$  contient forcément au moins un point sur cette droite.

Les autres cas se montrent de la même façon car les ensembles  $\mathbb{Z}^2 \setminus \{y = cste\}$ ,  $\mathbb{Z}^2 \setminus \{x - y = cste\}$ ,  $\mathbb{Z}^2 \setminus \{x + y = cste\}$  ne sont pas, respectivement 8-connexe, 6-connexe, 4-connexe.  $\square$

### 2.5.2 Directions horizontales et verticales

Maintenant on va prendre les directions verticales ( $p = x$ ) et horizontales ( $q = y$ ). La HV-insécabilité, la Q-HV-convexité, les HV-saillants désignent respectivement l'insécabilité, la Q-convexité, les saillants selon les directions horizontales et verticales.

#### 2.5.2.1 8-connexité

Le théorème suivant donne une caractérisation des ensembles HV-convexes et 8-connexes.

**Théorème 2.5.3** Soit  $E$  une partie de  $\mathbb{Z}^2$  alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- L'ensemble  $E$  est HV-convexe et 8-connexe.
- L'ensemble  $E$  est Q-HV-convexe et HV-insécable.

*Démonstration:*

- Supposons que  $E$  est HV-convexe et 8-connexe.

D'après la proposition 2.5.2 on sait que  $E$  est insécable selon les direction  $\{x, y\}$ . Il reste à prouver que  $E$  est Q-HV-convexe. Soit  $M$  un point de  $\mathbb{Z}^2$  tel que chaque  $R_i(M)$  contienne un point  $A_i$  de  $E$ .

Notons  $\Delta_i = R_i \cap R_{i+1}$ . En considérant un 8-chemin entre  $A_i$  et  $A_{i+1}$  on sait qu'il y a un point  $B_i \in (\Delta_{i-1} \cup \Delta_i) \cap E$ . (voir figure 2.9) Supposons qu'il existe  $k$  et  $l$  tels

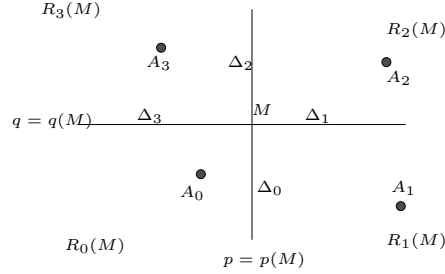


FIG. 2.9 – Pourquoi  $M$  est-il dans  $E$  ?

que  $B_k \in \Delta_0$  et  $B_l \in \Delta_2$ , alors nous savons par V-convexité que  $M \in E$ .

Supposons que pour tous  $k$  on ait  $B_k \notin \Delta_0$ . On a alors  $B_1 \in \Delta_1$  et  $B_0 \in \Delta_3$  et donc par H-convexité  $M \in E$ .

De la même façon si pour tous  $k$   $B_k \notin \Delta_2$  alors on sait que  $B_3 \in \Delta_3$  et  $B_2 \in \Delta_1$  et donc par H-convexité  $M \in E$ .

Dans tous les cas on a  $M \in E$  et donc  $E$  est Q-HV-convexe.

- Supposons maintenant  $E$  Q-HV-convexe. On va montrer la propriété suivante :  
“Si  $A$  et  $B$  sont deux points de  $E$  il existe un 8-chemin reliant  $A$  et  $B$  inclus dans  $E$ .”

On va faire une récurrence sur  $\max(|x_A - x_B|, |y_A - y_B|)$ . Supposons la propriété vraie pour tous  $A, B$  tel que  $\max(|x_A - x_B|, |y_A - y_B|) \leq l$ . Soient  $A$  et  $B$  tels que  $\max(|x_A - x_B|, |y_A - y_B|) \leq l + 1$ . On suppose par exemple que  $x_A < x_B$  et que  $y_A < y_B$ . Soit  $A_1(x_A, y_A + 1)$ ,  $A_2(x_A + 1, y_A)$ ,  $A_3(x_A + 1, y_A + 1)$ . S'il existe un  $A_i$  tel que  $A_i \in E$  alors d'après la récurrence on a bien un chemin entre  $A$  et  $B$ .

Supposons donc que  $A_1 \notin E$ ,  $A_2 \notin E$ ,  $A_3 \notin E$ .

Comme  $E$  est V-insécable il existe un point  $M$  tel que  $x_M = x_A + 1$ . Si  $y_M \leq y_A$  alors  $A_2 \in E$  par Q-convexité contradiction. Donc  $y_M > y_A$ . De même il existe un point  $N$  tel que  $y_N = y_A + 1$  et  $x_N > x_A$ . Mais alors  $A \in R_0(A_3)$ ,  $M \in R_3(A_3)$ ,  $B \in R_2(A_3)$ ,  $N \in R_1(A_3)$  et donc  $A_3 \in E$  contradiction. (voir figure 2.10)

□

Le problème de cette caractérisation est que l'on ne considère pas seulement des quadrants mais aussi des droites. On ne connaît donc pas a priori a quoi ressemble un ensemble de points saillants d'un HV-convexe 8-connexe. En fait la proposition suivante permet de résoudre ce problème.



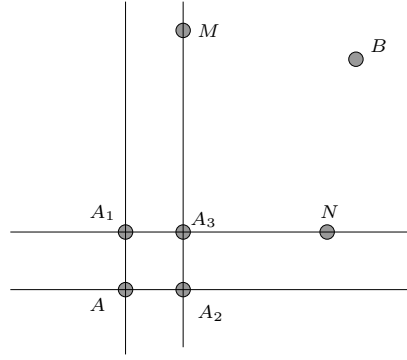


FIG. 2.10 – Le début du chemin entre A et B

**Proposition 2.5.4** *Un ensemble  $E$  est HV-convexe 8-connexé si et seulement si il est HV-Q-convexe et si pour tout  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  on a les quatre énoncés suivants :*

$$\begin{aligned}
 E \cap (R_0(x, y) \cup R_2(x + 1, y)) = \emptyset &\implies (E \cap R_1(x, y) = \emptyset \text{ ou } E \cap R_3(x, y) = \emptyset) \\
 E \cap (R_0(x, y) \cup R_2(x, y + 1)) = \emptyset &\implies (E \cap R_1(x, y) = \emptyset \text{ ou } E \cap R_3(x, y) = \emptyset) \\
 E \cap (R_3(x, y) \cup R_1(x + 1, y)) = \emptyset &\implies (E \cap R_0(x, y) = \emptyset \text{ ou } E \cap R_2(x, y) = \emptyset) \\
 E \cap (R_1(x, y) \cup R_3(x, y + 1)) = \emptyset &\implies (E \cap R_0(x, y) = \emptyset \text{ ou } E \cap R_2(x, y) = \emptyset)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

*Démonstration:*

$\Rightarrow$  Soit  $E$  un ensemble 8-connexé. Supposons que  $E \cap (R_0(x, y) \cup R_2(x + 1, y)) = \emptyset$ .

L'ensemble  $\mathbb{Z}^2 \setminus (R_0(x, y) \cup R_2(x + 1, y))$  a deux composantes 8-connexes  $R_1(x + 1, y - 1)$  et  $R_3(x, y + 1)$ . L'ensemble  $E$  est inclus dans une seule de ces composantes connexes et donc  $(E \cap R_1(x, y) = \emptyset \text{ ou } E \cap R_3(x, y) = \emptyset)$ . Les trois autres assertions se démontrent de la même façon.

$\Leftarrow$  Soit  $E$  une partie vérifiant les formules (2.3). D'après le théorème précédent il suffit de montrer que  $E$  est insécable. Soit donc  $x = i$  l'équation d'une droite verticale. On suppose que cette droite ne contient aucun point de  $E$  et que l'on a un point  $A \in E$  vérifiant  $x_A \leq i$  et un point  $B$  vérifiant  $x_B \geq i$ . Supposons que l'on a  $y_A \leq y_B$ .

Comme  $(i, y_B) \notin E$  on a  $R_3(i, y_B) \cap E = \emptyset$ . Soit  $jmin$  le plus petit entier tel que  $R_3(i, jmin) \cap E = \emptyset$ . Il existe donc un point  $C$  tel que  $y_C = jmin - 1$  et  $x_C < i$ . Comme  $(i, jmin - 1) \notin E$  on a forcément  $R_1(i, jmin - 1) \cap E = \emptyset$ . Donc on a  $A \in R_0(i, jmin - 1)$ ,  $B \in R_2(i, jmin)$ ,  $R_1(i, jmin - 1) \cap E = \emptyset$ ,  $R_3(i, jmin) \cap E = \emptyset$  contradiction avec

$$E \cap (R_1(x, y) \cup R_3(x, y + 1)) = \emptyset \implies (E \cap R_0(x, y) = \emptyset \text{ ou } E \cap R_2(x, y) = \emptyset)$$

avec  $x = i$  et  $y = jmin$ . □

Finalement, grâce au lemme 2.4.4 on obtient la caractérisation des ensembles de points saillants des HV-convexes 8-connexes :

**Corollaire 2.5.5** *Un ensemble  $S$  fini est un ensemble de point saillants d'un HV-convexe 8-connexé fini si et seulement si pour tout  $M$  dans  $S$  il existe  $i$  tel que  $R_i(M) \cap S = \{M\}$  et si  $S$  vérifie les formules (2.3).*

### 2.5.2.2 4-connexité

Avec la 4-connexité on a des caractérisations similaires mais on doit modifier l'adjacence des quadrants :

**Proposition 2.5.6** *Un ensemble  $E$  est HV-convexe 4-connexe si et seulement si il est HV-Q-convexe et si pour tout  $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$  on a les deux énoncés suivants :*

$$\begin{aligned} E \cap (R_0(x,y) \cup R_2(x+1,y+1)) = \emptyset &\implies (E \cap R_1(x,y) = \emptyset \text{ ou } E \cap R_3(x,y) = \emptyset) \\ E \cap (R_1(x+1,y) \cup R_2(x,y+1)) = \emptyset &\implies (E \cap R_0(x,y) = \emptyset \text{ ou } E \cap R_2(x,y) = \emptyset) \end{aligned} \quad (2.4)$$

*Démonstration:*

- Le sens  $\implies$  se démontre comme pour la proposition 2.5.4.
- $\Leftarrow$  Supposons que  $E$  vérifie les formules (2.4). En particulier  $E$  vérifie les formules (2.3) et est donc 8-connexe. Supposons que  $E$  n'est pas 4-connexe, il existe donc  $A$  et  $B$  dans  $E$  qui ne sont pas reliés par un 4-chemin inclus dans  $E$ . En considérant un 8-chemin entre  $A$  et  $B$  on peut se ramener au cas où  $A$  et  $B$  sont 8-adjacents. Supposons par exemple que  $A = (x,y)$  et  $B = (x+1,y+1)$ . Les points  $(x,y+1)$  et  $(x+1,y)$  ne sont pas dans  $E$ . On en déduit que  $R_1(x+1,y)$  et  $R_3(x,y+1)$  ne contiennent aucun point de  $E$ . Contradiction avec les formules (2.4).  $\square$

Cette proposition donne aussi une caractérisation des points saillants des polyominos finis HV-convexes : un ensemble  $S$  est un ensemble de points saillants d'un polyomino HV-convexe si et seulement si pour tout  $M$  dans  $S$  il existe  $i$  tel que  $R_i(M) \cap S = \{M\}$  et si  $S$  vérifie les formules (2.4). Cette caractérisation avait d'ailleurs été trouvée avant la définition des Q-convexes.

Les formules (2.4) peuvent aussi être énoncées en terme de point saillant quadré : si  $(A,i)$  et  $(A,i+2)$  sont des points saillants quadrés alors l'un des deux couples  $(A,i-1)$  ou  $(A,i+1)$  est aussi un point saillant quadré. Dans le graphe de consécuitivité un point saillant apparaît toujours dans des points quadrés consécutifs. Le cas du point  $C$  de l'exemple de la figure 2.6 ne peut donc pas se produire. Donc dans le cas des polyominos Q-convexes selon les directions horizontales et verticales il est inutile les points saillants quadrés car on peut définir directement un cycle à partir des points saillants.

### 2.5.3 Extension à 3 directions ou plus

Si  $\mathcal{D}$  est un ensemble fini de directions, la Q-convexité peut être généralisée de la façon suivante :

**Définition 2.5.7**  *$E \subset \mathbb{Z}^2$  est Q-convexe selon  $\mathcal{D}$  si pour tous  $p,q \in \mathcal{D}$  tels que  $p \neq q$  l'ensemble  $E$  est Q-convexe selon  $p$  et  $q$ .*

Avec cette définition on peut généraliser le théorème 2.5.3 à d'autres ensembles de directions :

**Proposition 2.5.8** *Soit  $\mathcal{D} = \{x,y,x-y,x+y\}$ . Une partie finie de  $\mathbb{Z}^2$  est 4-connexe et simplement convexe selon  $\mathcal{D}$  si et seulement si elle est insécable selon  $\mathcal{D}$  et Q-convexe selon  $\mathcal{D}$*

**Lemme 2.5.9** *Si  $E$  est fini 4-connexe et simplement convexe selon  $\{x - y, x + y\}$  alors  $E$  est Q-convexe selon  $\{x - y, x + y\}$ .*

La démonstration est similaire à celle du sens direct du théorème 2.5.3.

*Démonstration de la proposition 2.5.8:*  $\Rightarrow$ : la  $(1,0)$ - $(0,1)$ -Q-convexité provient du théorème 2.5.3 et la  $(1,1)$ - $(-1,-1)$ -Q-convexité du lemme 2.5.9.

Soit  $\phi$  l'isomorphisme de  $\mathbb{Z}^2$  qui transforme  $(1,0), (1,1)$  en  $(1,0), (0,1)$  ( $\phi(x, y) = (x - y, y)$ ). L'ensemble  $E$  est 4-connexe donc  $\phi(E)$  est 8-connexe car l'image par  $\phi$  du 4-voisinage d'un point est incluse dans le 8-voisinage de l'image du point. L'ensemble  $\phi(E)$  est donc 8-connexe et  $(1,0)$ - $(0,1)$  insécable (car  $E$  est  $(1,0)$ - $(1,1)$  insécable) et donc il est  $(1,0)$ - $(0,1)$ -Q-convexe par le théorème 2.5.3. On en déduit que  $E$  est  $(1,0)$ - $(1,1)$ -Q-convexe. On peut faire de même pour les trois autres couples de directions.

$\Leftarrow$ : Soit  $A$  et  $B$  deux points de  $E$ . On fait une récurrence sur  $d_1(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$ . On suppose  $x_A < x_B$  et  $y_A < y_B$ . Soit  $A_1 = (x_A + 1, y_A)$  et  $A_2 = (x_A, y_A + 1)$ . Par  $(1,1)$ -insécabilité on sait qu'il y a un point sur la droite  $(A_1 A_2)$ . Par  $(1,0)$ - $(1,1)$  et  $(0,1)$ - $(1,1)$ -Q-convexité on en déduit que  $A_1 \in E$  ou  $A_2 \in E$  d'où le résultat par récurrence.

Si  $x_A = x_B$  ou  $y_A = y_B$  on a le résultat par  $(1,0)$  ou  $(0,1)$  convexité simple.  $\square$

**Proposition 2.5.10** *Soit  $\mathcal{D} = \{x, y, x - y\}$ . Une partie finie de  $\mathbb{Z}^2$  est 6-connexe et convexe selon  $\mathcal{D}$  si et seulement si elle est Q-convexe selon  $\mathcal{D}$  et insécable selon  $\mathcal{D}$ .*

*Démonstration:*  $\Rightarrow$ : Si  $E$  est 6-connexe il est a fortiori 8-connexe et donc  $E$  est  $(1,0)$ - $(0,1)$ -Q-convexe. L'isomorphisme  $\phi : (x, y) \mapsto (x - y, y)$  de  $\mathbb{Z}^2$  transforme  $(1,0)$ - $(1,1)$ - $(0,1)$  en  $(1,0)$ - $(0,1)$ - $(-1,1)$ . On en déduit que  $E$  est  $(1,0)$ - $(1,1)$ -Q-convexe. De même façon on a la  $(0,1)$ - $(1,1)$ -Q-convexité.

$\Leftarrow$ : Soient  $A$  et  $B$  deux points de  $E$  tel que l'angle entre  $(1,0)$  et  $\overrightarrow{AB}$  est strictement compris entre 0 et 45 degrés. On va construire un  $(1,0)$ - $(1,1)$  chemin par récurrence sur  $|x_B - x_A| = x_B - x_A$ . Soit  $A_1 = (x_A + 1, y_A)$  et  $A_2 = (x_A, y_A + 1)$ . Soit  $M$  le point de  $E$  situé sur la droite  $x = x_A + 1$ .

Si  $y_M \leq y_A$  alors par  $(1,0)$ - $(0,1)$ -Q-convexité on a  $A_1 \in E$ . Si  $y_M > y_A$ , par  $(1,0)$ - $(1,1)$ -Q-convexité c'est  $A_2$  qui dans  $E$ . (voir figure 2.11) On a donc  $A_1 \in E$  ou  $A_2 \in E$ .

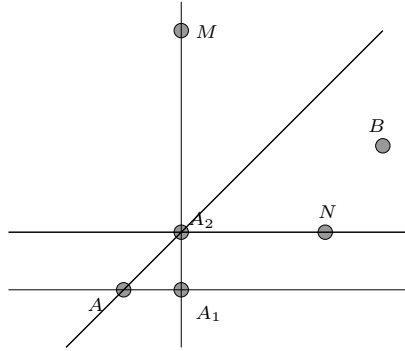


FIG. 2.11 – Le début du chemin entre  $A$  et  $B$ .

Supposons donc que  $A_1 \in E$ . L'angle entre  $(1,0)$  et  $\overrightarrow{A_1 B}$  est dans l'intervalle  $]0,45^\circ]$  car s'il était plus grand que  $45^\circ$ , alors les droites  $y = y_A$  et  $x - y = x_B - y_B$  ne se couperaient pas en un point de  $\mathbb{Z}^2$ . Si cet angle est exactement égal à  $45^\circ$  alors la droite  $(A_1 B)$  est elle-même un 6-chemin entre  $A_1$  et  $B$  et donc on a bien un 6-chemin entre  $A$  et  $B$ . Sinon d'après la récurrence il existe un 6-chemin entre  $A_1$  et  $B$  qui peut être prolongé en un chemin entre  $A$  et  $B$ .

Si  $A_2 \in E$  on montre de la même façon qu'il existe un 6-chemin entre  $A_2$  et  $B$  qui se prolonge donc en un 6-chemin entre  $A$  et  $B$ .

Les autres cas s'en déduisent par symétrie.  $\square$

## 2.6 Liens avec la convexité totale

Contrairement à ce qui se passe avec la 2-convexité le lien entre la Q-convexité et la convexité totale est très simple :

**Proposition 2.6.1** *Soit  $E$  une partie de  $\mathbb{Z}^2$ . Les deux propositions sont équivalentes :*

- *L'ensemble  $E$  est totalement convexe.*
- *Pour toutes directions rationnelles  $p$  et  $q$ , l'ensemble  $E$  est Q-convexe selon  $(p,q)$ .*

*Démonstration:* L'implication  $\Rightarrow$  est claire.

Pour l'autre sens considérons un ensemble  $E$  Q-convexe selon tout couple  $(p,q)$ . D'après la proposition 1.1.4 il suffit de montrer que tout point  $M$  intérieur à un triangle  $ABC$  où  $A,B,C \in E$  est aussi dans  $E$ . Si  $M$  est sur l'un des côtés du triangle, comme  $E$  est Q-convexe selon tous les couples de directions, il est a fortiori 2-convexe et donc  $M \in E$ .

Sinon on considère le couple de directions  $(p,q)$  où  $p$  est la direction de  $(AM)$  et  $q$  est la direction de  $(BM)$  et tel que  $q(A) \leq q(M)$  et  $p(B) \leq p(M)$ . Pour tout  $i \neq 2$  on a  $R_i(M) \cap \{A,B\} \neq \emptyset$ . On a forcément  $p(C) \geq p(M)$  car sinon le triangle  $ABC$  est dans le demi-plan de frontière  $p = p(M)$  et donc  $M$  est sur un des côtés de  $ABC$  contradiction. De même  $q(C) \geq q(M)$ . Donc  $C \in R_2(M)$  et  $M \in E$  par Q-convexité selon  $(p,q)$ . (voir figure 2.12)  $\square$

On peut maintenant étudier les points saillants des *polyominos* totalement convexes :

**Proposition 2.6.2** *Si  $E$  est un polyomino totalement convexe alors deux points HV-saillants consécutifs  $A$  et  $B$  de  $E$  vérifient toujours  $|x_A - x_B| \leq 1$  ou  $|y_A - y_B| \leq 1$ .*

*Démonstration:* Si  $[AB]$  est un pied on  $x_A = x_B$  ou  $y_A = y_B$ . On peut donc supposer qu'il existe  $i$  tel que  $R_i(A) \cap E = \emptyset$  et  $R_i(B) \cap E = \emptyset$ . On suppose par exemple  $i = 0$  et  $p(A) < p(B)$ . Soit  $N = (x_B, y_A)$  et  $N' = (x_B - 1, y_A - 1)$ , comme  $A$  et  $B$  sont consécutifs on sait que  $R_0(N') \cap E = \emptyset$ . Puisque  $A$  et  $B$  sont reliés par un 4-chemin on a que  $[AN] \cup [BN] \subset E$ . Donc si  $|x_A - x_B| > 1$  et  $|y_A - y_B| > 1$ , alors  $(x_A - 2, y_B), (x_A, y_B - 2) \in E$ , donc par convexité  $(x_A - 1, y_B - 1) \in E$  contradiction avec  $R_0(N') \cap E = \emptyset$ .  $\square$

En fait dans le graphe de consécuitivité des points HV-saillants un point est toujours compris entre deux sommets (voir section 1.1, les sommets sont des saillants particulier). Plus exactement si  $A$  et  $B$  sont deux tels sommets vérifiant  $R_0(A) \cap E = \{A\}$  et  $R_0(B) \cap E = \{B\}$  et  $0 \leq y_B - y_A \leq x_B - x_A$  alors les points saillants entre  $A$  et  $B$  sont exactement les points  $S_i = \left( x_A + i, y_A + \left\lceil \frac{(y_B - y_A)i}{x_B - x_A} \right\rceil \right)$  pour  $0 \leq i \leq x_B - x_A$ . (voir figure 2.13)

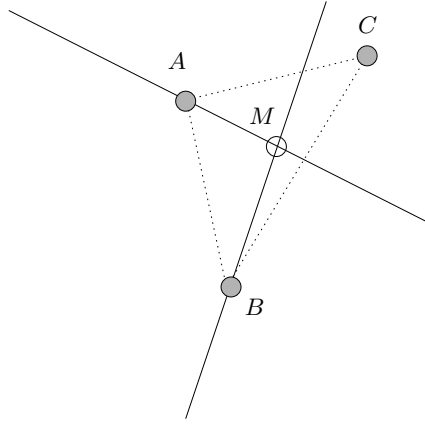


FIG. 2.12 – Pourquoi La Q-convexité selon toutes les directions entraîne-t-elle la convexité totale ?

## 2.7 Les Q-convexes forts

Dans ce paragraphe  $\mathcal{D}$  désigne un ensemble de directions rationnelles.

L'enveloppe Q-convexe selon plus de deux directions est assez difficile à calculer. En effet si  $E$  est une partie finie de  $\mathbb{Z}^2$  en effet  $QCONV_{qr}(QCONV_{pr}(QCONV_{pq}(E)))$  n'est pas forcément Q-convexe selon les couples  $(p,q)$  ou  $(q,r)$ . (voir figure 2.14.) Il faut donc effectuer l'opération  $E \mapsto QCONV_{qr}(QCONV_{pr}(QCONV_{pq}(E)))$  jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de modifications. Ce qui peut être assez long.

Il faut essayer de définir la Q-convexité de façon plus globale sur toutes les directions. Pour cela il faut d'abord essayer de redéfinir les quadrants pour des ensembles de plus de deux directions.

### 2.7.1 Définitions

**Définition 2.7.1** *Un ASP (presque-demi-plan, almost-semi-plane) selon  $\mathcal{D}$  est un  $\Pi = R_i^{pq}(M)$  tel que pour chaque direction  $d$  de  $\mathcal{D}$  il existe une demi-droite de direction  $d$  et d'origine  $M$  et contenue dans  $\Pi$*

En fait un ASP est un élément maximum dans l'ensemble  $\{R_i^{pq}(M) \mid p, q \in \mathcal{D}\}$  ordonné par l'inclusion. Un ASP peut aussi être vu comme un demi-plan auquel on a enlevé un  $R_i^{pq}$  minimal. Le nombre d'ASP autour d'un point  $M$  est en fait égal au nombre de demi-plans de frontière dans  $\mathcal{D}$  est passant par  $M$ ; il y a donc  $2|\mathcal{D}|$  ASP autour d'un point  $M$ . La propriété pour  $R_i^{pq}(M)$  d'être un ASP ne dépend pas de  $M$ .

On note  $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$  (ou même  $\mathcal{A}$ ) l'ensemble des  $(i,p,q)$  tels que  $R_i^{pq}$  est un ASP.

Cette nouvelle notion permet de définir la Q-convexité forte :

**Définition 2.7.2** *Un Q-convexe fort (ou ensemble fortement Q-convexe) est un ensemble  $E$  tel que pour tout point  $M \notin E$  il existe un ASP  $\Pi$  tel que  $E \cap \Pi = \emptyset$ .*

L'intersection de deux Q-convexes forts selon  $\mathcal{D}$  est encore fortement Q-convexe donc on peut définir l'enveloppe Q-convexe forte d'une partie de  $\mathbb{Z}^2$ .

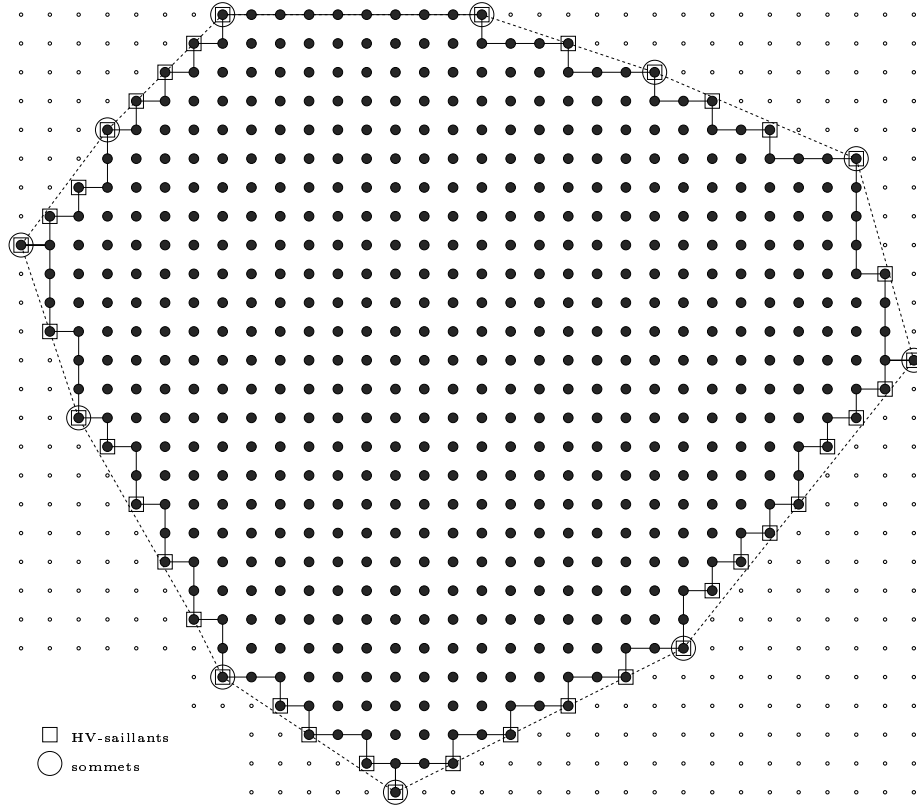


FIG. 2.13 – Points HV-saillants d'un polyomino totalement convexe.

Comme prévu cette enveloppe se calcule beaucoup plus facilement que l'enveloppe Q-convexe selon plusieurs directions :

**Proposition 2.7.3** *L'enveloppe Q-convexe forte selon  $\mathcal{D}$  d'une partie  $E$  de  $\mathbb{Z}^2$  (notée  $QCONVFORT_{\mathcal{D}}(E)$ ) est donnée par :*

$$QCONVFORT_{\mathcal{D}}(E) = \{M \mid \forall (i,p,q) \in \mathcal{A} \quad R_i^{pq}(M) \cap E \neq \emptyset\}$$

Cette enveloppe Q-convexe forte peut donc se calculer en temps linéaire en fonction de la taille du polygone  $\Delta = \{M \in \mathbb{Z}^2 : \forall p \in \mathcal{D} \min_{N \in E} p(N) \leq p(M) \leq \max_{N \in E} p(N)\}$ .

### 2.7.2 Liens avec la Q-convexité

Quand  $\mathcal{D}$  ne contient que deux directions, la Q-convexité forte selon  $\mathcal{D}$  est équivalente à la Q-convexité. Cette équivalence ne se généralise pas pour trois directions. En effet l'ensemble de la figure 2.16 est Q-convexe selon  $\mathcal{D} = \{x + 3y, x, 2x + 3y\}$  mais il n'est pas Q-convexe fort selon les mêmes directions.

Le lien avec les Q-convexes est un peu plus compliqué. Pour cela on va encore définir d'autres régions de  $\mathbb{Z}^2$  : si  $p, q, r$  sont trois directions de  $\mathcal{D}$  et si  $r = \alpha p + \beta q$  avec  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ , alors les 6 régions délimitées par les 3 droites de direction  $p, q, r$  et passant par un

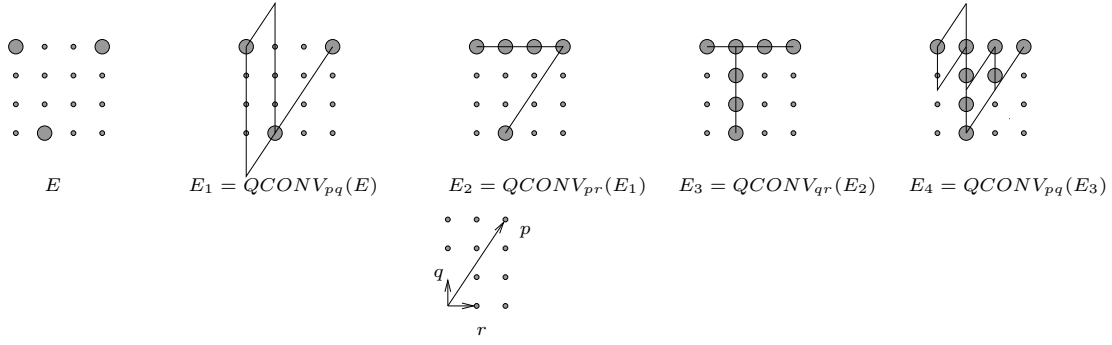


FIG. 2.14 – Calcul de l'enveloppe Q-convexe selon  $\{p,q,r\}$  d'un ensemble  $E$  avec  $p = 3x - 2y$ ,  $q = x$ ,  $r = y$ .

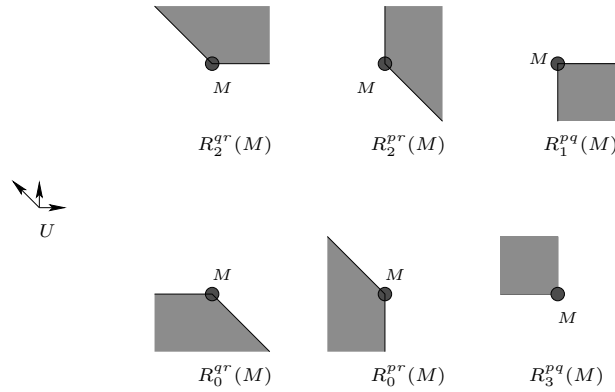


FIG. 2.15 – Les 6 types d'ASP pour  $\mathcal{D} = \{p,q,r\}$ ,  $p = x$ ,  $q = y$ ,  $r = x + y$ .

point  $M$  sont notées :

$$\begin{aligned}
 V_0^{pqr}(M) &= \{N / p(N) \leq p(M) \text{ et } q(N) \leq q(M)\} = R_0^{pq}(M) \\
 V_1^{pqr}(M) &= \{N / p(N) \geq p(M) \text{ et } r(N) \leq r(M)\} = R_1^{pr}(M) \\
 V_2^{pqr}(M) &= \{N / q(N) \leq p(M) \text{ et } r(N) \geq r(M)\} = R_3^{qr}(M) \\
 V_3^{pqr}(M) &= \{N / p(N) \geq p(M) \text{ et } q(N) \geq q(M)\} = R_2^{pq}(M) \\
 V_4^{pqr}(M) &= \{N / p(N) \leq p(M) \text{ et } r(N) \geq r(M)\} = R_3^{pr}(M) \\
 V_5^{pqr}(M) &= \{N / q(N) \geq q(M) \text{ et } r(N) \leq r(M)\} = R_1^{qr}(M)
 \end{aligned}$$

Si on n'a pas  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ , on a les définitions suivantes

- Si  $\alpha > 0$  et  $\beta < 0$ , on a  $V_i^{pqr} = V_i^{p,-q,r}$
- Si  $\alpha < 0$  et  $\beta > 0$ , on a  $V_i^{pqr} = V_i^{-p,q,r}$
- Si  $\alpha < 0$  et  $\beta < 0$ , on a  $V_i^{pqr} = V_i^{p,q,-r}$

En fait les Q-convexes forts sont les Q-convexes qui vérifient une petite condition supplémentaire :

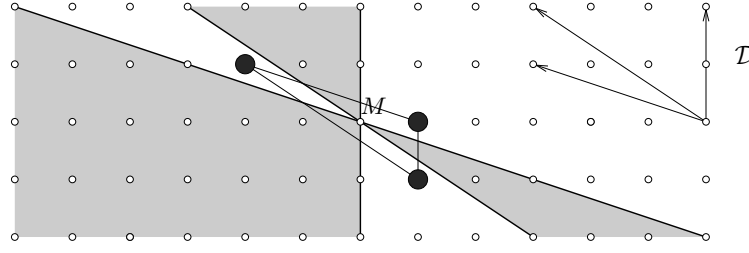


FIG. 2.16 – Un ensemble Q-convexe selon  $\mathcal{D} = \{x + 3y, 2x + 3y\}$  mais qui n'est pas Q-convexe fort selon  $\mathcal{D}$ .

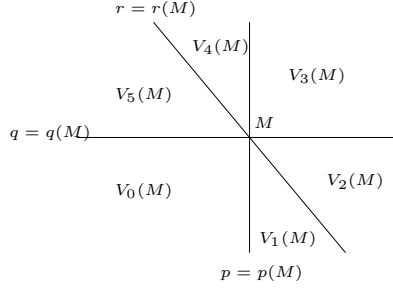


FIG. 2.17 – Les 6 régions  $V^{pqr}$  pour  $p = x$ ,  $q = y$ ,  $r = x + y$ .

**Proposition 2.7.4** *Un ensemble  $E$  est fortement Q-convexe si et seulement si il est Q-convexe et pour tous  $p, q, r \in \mathcal{D}$ ,  $k \in \{0, 1\}$ ,  $M \in \mathbb{Z}^2$  on a*

$$(\forall i \ V_{2i+k}^{pqr}(M) \cap E \neq \emptyset) \implies M \in E \quad (2.5)$$

*Démonstration:*  $\Rightarrow$  On suppose que  $E$  est fortement Q-convexe. Pour tout  $M \notin E$  il y a un ASP (et donc un quadrant) qui ne contient aucun point de  $E$ . On ne peut pas avoir  $\forall i \ V_{2i+k} \cap E \neq \emptyset$  car un ASP contient toujours deux  $V_i$  consécutifs.

$\Rightarrow$  Maintenant supposons que  $E$  est Q-convexe et vérifie la seconde propriété. Soit  $M \notin E$  et soit  $\Pi$  un  $R_i^{pq}(M)$  disjoint avec  $E$  et maximum pour l'ordre partiel suivant :

$$R_i^{pq}(M) \prec R_j^{pq}(M) \text{ ssi } R_i^{pq}(M) \subset R_j^{pq}(M) \text{ ou } R_{i+2}^{pq}(M) \subset R_j^{pq}(M)$$

Supposons que  $\Pi = R_i^{pq}(M)$  n'est pas un ASP. Il existe donc une direction  $r$  telle que  $\Pi = R_i^{pq} = V_j^{pqr}$ . Les régions  $V_{j+1}^{pqr}$  et  $V_{j-1}^{pqr}$  contiennent un point de  $E$  car sinon  $\Pi$  n'est pas maximum. Si  $V_{j+3}^{pqr} = R_{i+2}^{pq}$  ne contient pas un point de  $E$  alors, à cause de la définition de  $\prec$  les ensembles  $V_{j+2}^{pqr}$  et  $V_{j-2}^{pqr}$  contiennent aussi un point de  $E$  ce qui est impossible par  $(p, r)$ -Q-convexité. Donc  $V_{j+1}^{pqr}(M)$ ,  $V_{j-1}^{pqr}(M)$ ,  $V_{j+3}^{pqr}(M)$  contiennent un point de  $E$  et donc  $M \in E$  contradiction.  $\square$

Par exemple dans la figure 2.16 le point  $M$  vérifie bien la formule (2.5), pourtant  $M$  n'est pas dans l'ensemble, donc cet ensemble n'est pas Q-convexe fort.

On va voir maintenant que la Q-convexité forte est une notion légèrement plus forte que la Q-convexité, en effet si on ajoute quelques hypothèses alors on a équivalence entre la Q-convexité forte et la Q-convexité.



### 2.7.2.1 Avec l'insécabilité

Comme pour la connexité (section 2.5) l'insécabilité va nous permettre de rendre plusieurs notions équivalentes :

**Proposition 2.7.5** *Si  $\mathcal{D}$  est un ensemble de directions rationnelles et  $E$  un ensemble insécable selon une direction  $p \in \mathcal{D}$  alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

1.  $E$  est Q-convexe selon les couples  $(p,q)$  pour tout  $q \in \mathcal{D}$ .
2.  $E$  est Q-convexe selon  $\mathcal{D}$  ie  $E$  est Q-convexe selon tous les couples  $(q,r) \in \mathcal{D}^2$ .
3.  $E$  est Q-convexe fort selon  $\mathcal{D}$ .

*Démonstration:*

(1) $\Rightarrow$  (2) (due à Sara Brunetti [BD00]). Soit donc  $q$  et  $r$  deux directions différentes de  $p$  et  $M$  un point qui n'est pas dans  $E$ . On va montrer qu'il existe un quadrant de directions  $q,r$  autour de  $M$  qui ne contient aucun point de  $E$ . Si  $E$  est compris dans un demi-plan de frontière  $p = p(M)$  c'est clair. Sinon comme  $E$  est insécable on sait que la droite  $p = p(M)$  contient un point  $N$  de  $E$ . Quitte à remplacer  $q$  par  $-q$  et  $r$  par  $-r$  on peut supposer que  $p = \alpha q + \beta r$  avec  $\alpha > 0, \beta > 0$ .

– Supposons  $q(N) > q(M)$ . Comme  $N \in R_2(M) \cap R_3(N)$  on a  $R_0^{pq}(M) \cap E = \emptyset$  ou  $R_1^{pq}(M) \cap E = \emptyset$ . On a  $p = \alpha q + \beta r$  avec  $\alpha > 0, \beta > 0$  et  $p(M) = p(N), q(N) > q(M)$  donc  $r(N) < r(M)$ . Comme  $E$  est Q-convexe selon  $(p,r)$  on en déduit que  $R_2^{pr}(M) \cap E = \emptyset$  ou  $R_3^{pr}(M) \cap E = \emptyset$ . Comme  $R_0^{qr}(M) \subset R_0^{pq}(M)$  et  $R_2^{qr}(M) \subset R_2^{pr}(M)$  et  $R_3^{qr}(M) = R_1^{pq}(M) \cup R_3^{pr}(M)$  on peut toujours trouver  $i$  tel que  $R_i^{qr}(M) \cap E = \emptyset$ . (voir figure 2.18)

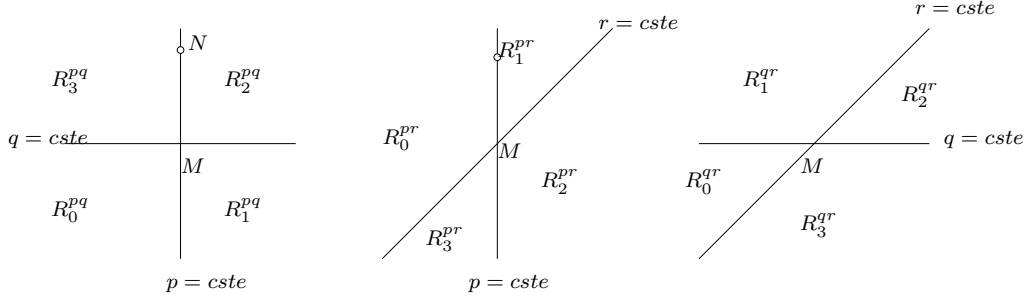


FIG. 2.18 – On a bien  $R_0^{qr}(M) \subset R_0^{pq}(M)$ ,  $R_2^{qr}(M) \subset R_2^{pr}(M)$ , et  $R_3^{qr}(M) = R_1^{pq}(M) \cup R_3^{pr}(M)$  lorsque  $p = \alpha q + \beta r$  avec  $\alpha > 0, \beta > 0$ .

– Le cas  $q(N) < q(M)$  est similaire.

(2) $\Rightarrow$  (3) il faut montrer que  $E$  vérifie la caractérisation de la proposition 2.7.4. Soit donc  $q,r,s$  trois directions de  $\mathcal{D}$ ,  $k \in \{0,1\}$  et un point  $M$  qui vérifie

$$(\forall i \ V_{2i+k}^{qrs}(M) \cap E \neq \emptyset)$$

On va supposer que  $M \notin E$  donc par (simple) Q-convexité on a  $(\forall i \ V_{2i+k+1}^{qrs}(M) \cap E = \emptyset)$ . Comme  $E$  est insécable dans la direction  $p$ , cette dernière ne peut pas être dans  $\{q,r,s\}$ . Soit  $N$  le point de  $E$  sur la droite  $p = p(M)$ . On peut supposer par exemple

que  $N \in V_0^{qrs}$ , dans ce cas là on a  $k = 0$  et donc  $M \in E$  par  $Q$ -convexité selon  $(p,s)$  *contradiction*. (voir figure 2.19)  $\square$

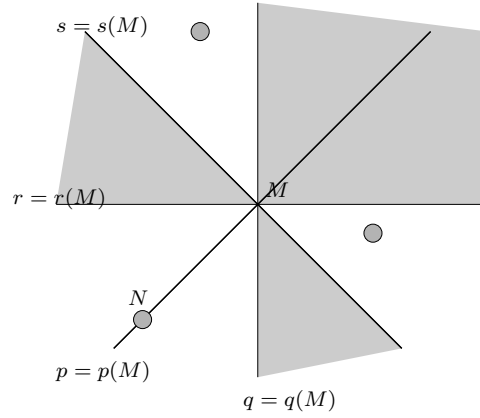


FIG. 2.19 – L'insécabilité selon  $p$  entraîne la  $Q$ -convexité forte

### 2.7.2.2 Avec le déterminant

**Proposition 2.7.6** *Si  $\mathcal{D} = \{p, q, r\}$  est un ensemble de trois directions tel que  $|\det(p, q)| = 1$  et  $E$  une partie de  $\mathbb{Z}^2$  alors  $E$  est  $Q$ -convexe fort selon  $\mathcal{D}$  si et seulement si  $E$  est  $Q$ -convexe selon  $\mathcal{D}$ .*

*Démonstration:* Soit  $\mathcal{D} = \{p, q, r\}$  tel que  $|\det(p, q)| = 1$  et  $E$  un  $Q$ -convexe selon  $\mathcal{D}$ , on suppose comme précédemment que l'on a un point  $M$  tel que  $(\forall i \ V_{2i+k}^{pqr}(M) \cap E \neq \emptyset)$  et  $(\forall i \ V_{2i+k+1}^{pqr}(M) \cap E = \emptyset)$ . On suppose pour simplifier  $k = 0$  et  $r = \alpha p + \beta q$  avec  $\alpha > 0, \beta > 0$ . Soit  $A \in V_0^{pqr}(M) \cap E$ ,  $B \in V_2^{pqr}(M) \cap E$ ,  $C \in V_4^{pqr}(M) \cap E$ .

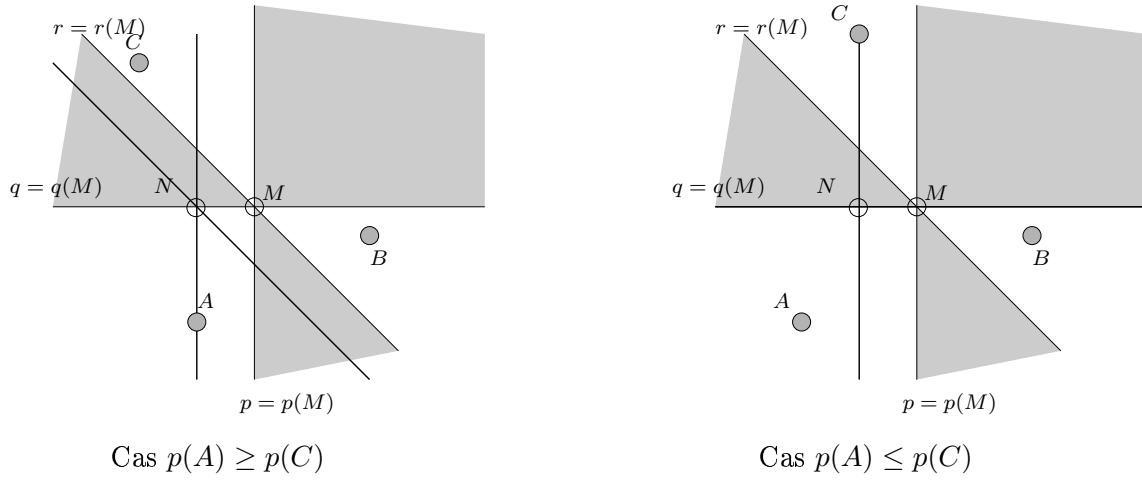
Soit  $N$  tel que  $p(N) = \max(p(A), p(C))$  et  $q(M) = q(N)$ . Le point  $N$  est dans  $\mathbb{Z}^2$  car  $|\det(p, q)| = 1$ .

- Si  $p(A) \geq p(C)$  alors par  $(p, r)$ -convexité  $N \in E$ .
- Si  $p(A) \leq p(C)$  par  $(p, q)$ -convexité  $N \in E$ .

Dans tous les cas il y a contradiction avec  $V_5^{pqr}(M) \cap E = \emptyset$  (voir figure 2.20)  $\square$

Si on a plus de trois directions, la proposition précédente et la caractérisation 2.7.4 montrent que pour avoir l'équivalence  $Q$ -convexité forte –  $Q$ -convexité il suffit que pour tout triplet de directions on en a deux dont le déterminant est 1. Par exemple les notions sont équivalentes pour un ensemble de directions de la forme  $\mathcal{D} = \{(1, 0), (0, 1), (a, 1), (1, b)\}$ .

Par contre la proposition précédente ne s'étend pas à 4 directions: il existe des ensembles  $\mathcal{D}$  à 4 directions qui contiennent deux directions dont le déterminant est 1 et pour lesquels la  $Q$ -convexité forte n'est pas équivalente la  $Q$ -convexité. (voir figure 2.21)

FIG. 2.20 – Pourquoi a-t-on toujours  $N \in E$  ?

### 2.7.3 Points saillants des Q-convexes forts

La définition des points saillants dans le cas de plus de trois directions est pratiquement la même que dans le cas de deux directions :

**Définition 2.7.7** *Un point  $M$  est un point saillant de  $E$  selon les directions de  $\mathcal{D}$  si  $M$  n'est pas dans l'enveloppe Q-convexe forte selon  $\mathcal{D}$  de  $E \setminus \{M\}$ .*

Grâce à la proposition 2.7.3 on peut dire que les points saillants d'un Q-convexe fort  $E$  sont les points  $M$  tels qu'il existe un ASP  $\Pi$  autour de  $M$  tels que  $\Pi \cap E = \{M\}$ .

On a un analogue de la proposition 2.4.3 pour les Q-convexes forts :

**Proposition 2.7.8** *Tout Q-convexe fort fini est l'enveloppe Q-convexe forte de ses points saillants.*

La démonstration est la même que celle de la proposition 2.4.3: tous les ASP autour de chaque point  $M$  de l'ensemble contiennent un point saillant.

**Remarque 2.7.9** *Cette propriété est fausse pour les Q-convexes non forts : un ensemble Q-convexe n'est pas forcément l'enveloppe Q-convexe des points qui ne sont pas dans l'enveloppe Q-convexe des autres points. Voir figure 2.22.*

On peut aussi définir la consécutivité. Pour cela on considère

$$S' = \{(M, i, p, q) : (i, p, q) \in \mathcal{A} \text{ et } R_i^{pq}(M) \cap E \neq \{M\}\}$$

Deux quadruplets  $(A, i, p, q)$  et  $(B, j, p', q')$  sont consécutifs si on est dans l'un des deux cas :

- $(i, p, q) = (j, p', q')$  et le quadrant  $R_i^{pq}$  dont les bords contiennent  $A$  et  $B$  ne contient des points de  $E$  seulement sur ces bords (comme dans les 4 premiers cas de la définition 2.4.7)
- Les ensembles  $\{p, q\}$  et  $\{p', q'\}$  ont exactement un élément commun  $r$ , on a  $r(A) = r(B)$ ,  $E$  est inclus entièrement dans un des demi-plans de frontière  $r = r(A)$  et

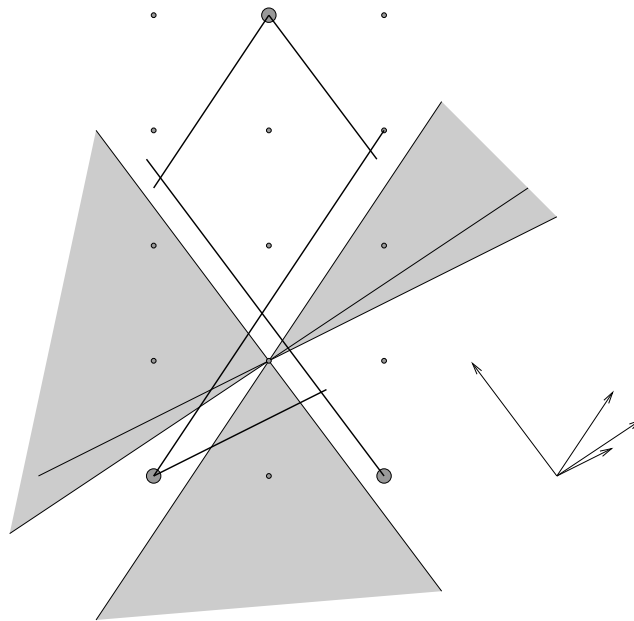


FIG. 2.21 – L'ensemble  $E = \{(0,0), (2,0), (1,4)\}$  est  $Q$ -convexe selon  $\mathcal{D} = \{2x - 3y, 4x + 3y, 3x - 2y, -x + 2y\}$  mais n'est pas  $Q$ -convexe fort selon  $\mathcal{D}$ , pourtant  $\det(2x - 3y, -x + 2y) = 1$ .

$R_i^{pq}(A)$  et  $R_i^{p'q'}(B)$  sont inclus dans l'autre demi-plan de frontière  $r = r(A)$ . Dans ce cas on dit que  $[AB]$  est un pied de  $E$ .

(voir figure 2.23)

On a muni  $S'$  une structure de graphe, comme dans le cas de deux directions ce graphe est un cycle (voir figure 2.24). La démonstration est similaire, on doit définir  $2|\mathcal{D}|$  ensembles  $S_i^{pq} = \{M : (M, i, p, q) \in S'\}$ .

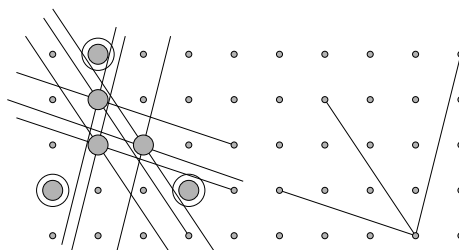


FIG. 2.22 – Un ensemble  $Q$ -convexe qui n'est pas l'enveloppe  $Q$ -convexe d'un ensemble minimum de points

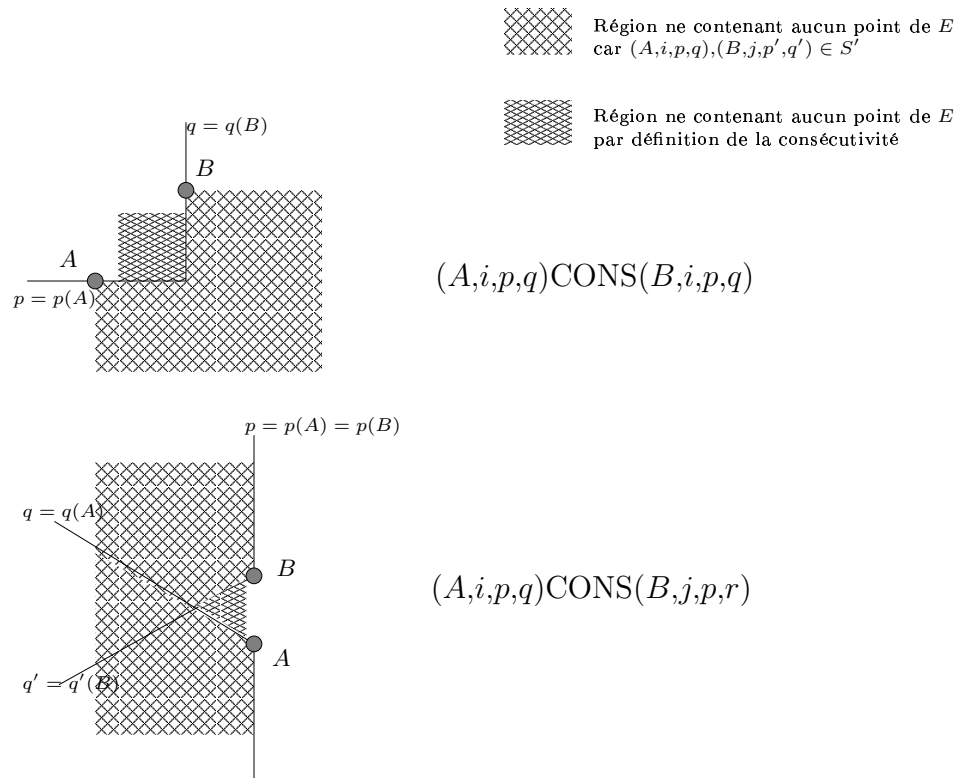
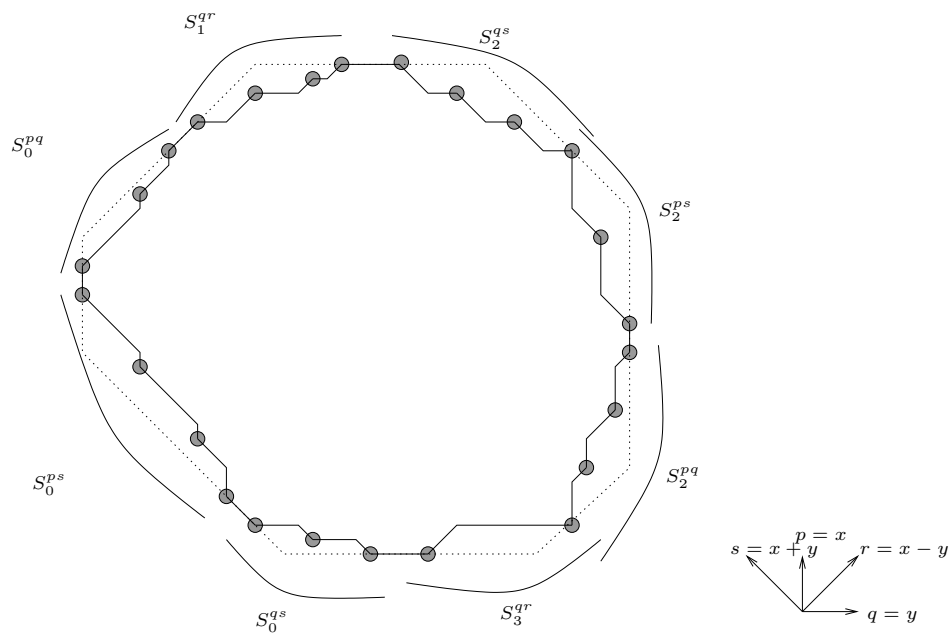
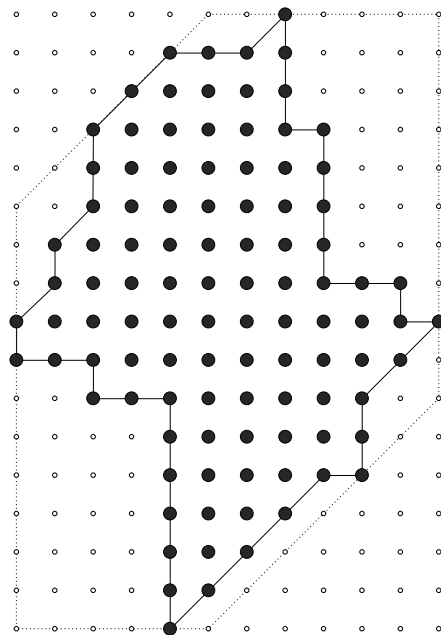


FIG. 2.23 – Les deux types de consécuité des saillants forts.

FIG. 2.24 – Points saillants d'un  $Q$ -convexe fort

FIG. 2.25 – *Un  $Q$ -convexe fort selon  $\{x, y, x - y\}$ .*



# Chapitre 3

## Fonctions convexes discrètes

Dans ce chapitre on va étudier les fonctions convexes de  $\mathbb{Z}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . Leur homologues du continu, les fonctions convexes de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  jouent un rôle très important en mathématiques, en particulier en optimisation. Comme pour les ensembles on a plusieurs possibilités pour la définition de la convexité « discrète ». On va choisir celle qui ressemble le plus à la convexité continue. Certaines preuves de ce chapitre peuvent paraître classiques mais en fait elles sont nécessaires si veut avoir une notion intrinsèque de fonction convexe discrète.

Les résultats de ce chapitre nous serviront dans le prochain chapitre sur les points médians.

### 3.1 Définition, premières propriétés

#### 3.1.1 Convexité

**Définition 3.1.1** Une fonction  $f$  de  $D \subset \mathbb{Z}^n$  dans  $\mathbb{R}$  est une fonction convexe si et seulement si pour tous  $A_1, \dots, A_{n+1} \in D$  et tous  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  réels positifs de somme 1 on a

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i A_i \in D \implies f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(A_i).$$

Par exemple la restriction à  $\mathbb{Z}^n$  d'une fonction convexe de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}$  est convexe.

**Proposition 3.1.2** Si  $f$  est une fonction convexe définie sur un ensemble  $D \subset \mathbb{Z}^n$  dans  $\mathbb{R}$  et  $A_1, \dots, A_k \in D$  des points de  $\mathbb{Z}^n$  alors

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i \in D \implies f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(A_i).$$

Cette proposition justifie la définition des fonctions convexes. Par contre cette propriété n'est pas vraie pour les fonctions qui vérifient simplement  $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$ : par exemple si on considère la fonction définie sur  $E = \{(-1, -1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$



par  $f(0,0) = 1$  et  $f(x,y) = 0$  si  $(x,y) \neq (0,0)$ . Encore une fois la définition du continu ne fonctionne pas dans le discret !

*Démonstration:* La démonstration de cette proposition est basée sur celle du théorème de Carathéodory (voir [Ber90, 11.1.8.6]) On va démontrer la proposition par récurrence sur  $k$ . Pour  $k \leq n + 1$  c'est la définition. Supposons que la propriété soit vraie tout  $k' < k$  et que  $k > n + 1$

Soit  $A_1, A_2, \dots, A_k \in D$  des points de  $D$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  des réels tous non nuls de somme 1 et  $M = \sum_i \lambda_i x_i$ , on va montrer que  $M$  est un barycentre de  $k - 1$  points parmi les  $A_i$  de deux façons différentes. (lemme du cerf-volant, voir figure 3.1).

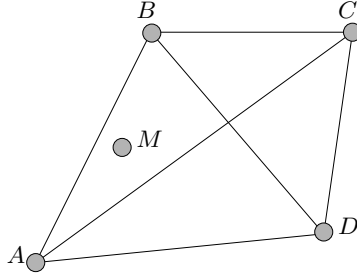


FIG. 3.1 – Le point  $M$  est dans  $\text{conv}(A,B,C,D)$ , mais il est aussi dans  $\text{conv}(A,B,C)$  et dans  $\text{conv}(A,B,D)$ , et toute coordonnée barycentrique de  $M$  dans  $(A,B,C,D)$  est une combinaison positive des coordonnées de  $M$  dans  $(A,B,C)$  et de celles de  $M$  dans  $(A,B,D)$

On a  $k \geq n + 2$  donc la famille  $(A_i)_{1 \leq i \leq k}$  de points de  $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{Q}^n$  est affinement dépendante. On en déduit l'existence de rationnels  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tels que  $\sum \alpha_i = 0$  et  $\sum \alpha_i A_i = 0$ . Soit  $i_1$  et  $i_2$  tels que

$$\tau_1 = -\frac{\lambda_{i_1}}{\alpha_{i_1}} = \min_{\alpha_i < 0} \left( -\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \right), \quad \tau_2 = -\frac{\lambda_{i_2}}{\alpha_{i_2}} = \max_{\alpha_i > 0} \left( -\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \right).$$

On a  $\tau_2 < 0 < \tau_1$ . Pour tout  $\tau$  on a

$$M = \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \tau \alpha_i) A_i$$

mais en prenant  $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$  on a  $\lambda_i + \tau \alpha_i \geq 0$  pour tout  $i$  et de plus  $\lambda_{i_1} + \tau \alpha_{i_1} = 0$  et  $\lambda_{i_2} + \tau \alpha_{i_2} = 0$  donc d'après l'hypothèse de récurrence on a :

$$f(M) \leq \sum_{i \neq i_1} (\lambda_i + \tau_1 \alpha_i) f(A_i) \tag{3.1}$$

$$f(M) \leq \sum_{i \neq i_2} (\lambda_i + \tau_2 \alpha_i) f(A_i) \tag{3.2}$$

En faisant  $\frac{\tau_1(3.2) - \tau_2(3.1)}{\tau_1 - \tau_2}$  on obtient

$$\begin{aligned} f(M) &\leq \sum_{i \neq i_1, i_2} \lambda_i f(A_i) + \frac{\tau_1(\lambda_{i_1} + \tau_2 \alpha_{i_1})}{\tau_1 - \tau_2} f(A_{i_1}) - \frac{\tau_2(\lambda_{i_2} + \tau_1 \alpha_{i_2})}{\tau_1 - \tau_2} f(A_{i_2}) \\ &= \sum_{i \neq i_1, i_2} \lambda_i f(A_i) + \lambda_{i_1} f(A_{i_1}) + \lambda_{i_2} f(A_{i_2}) \end{aligned}$$

Ce qui est l'inégalité voulue.  $\square$

**Définition 3.1.3** Si  $f$  est une fonction de  $D \subset \mathbb{Z}^n$  alors l'épigraphe de  $f$  est la partie  $E$  de  $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}$  définie par :

$$E = \{(M, y) : M \in D \text{ et } y \geq f(M)\}.$$

**Proposition 3.1.4** Soit  $f$  une fonction de  $D \subset \mathbb{Z}^n$  vers  $\mathbb{R}$  alors les 3 propositions suivantes sont équivalentes

1. la fonction  $f$  est une fonction convexe.
2. l'épigraphe  $E$  est convexe c'est à dire  $E = \text{conv}_{\mathbb{R}^{n+1}}(E) \cap (D \times \mathbb{R})$ .
3. il existe une fonction convexe  $g$  de  $\text{conv}(D) \subset \mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}$  telle que  $f$  est la restriction de  $g$  à  $D$ .

*Démonstration:*

- (1)  $\Rightarrow$  (2). Soit  $(M, y) \in \text{conv}_{\mathbb{R}^{n+1}}(E) \cap (D \times \mathbb{R})$ . On est dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , donc on sait que  $(M, y)$  est barycentre de  $n+2$  points de  $E$ , il existe donc des points  $A_i \in D$  et des coefficients positifs  $\lambda_i$  de somme 1 tels que :

$$M = \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i A_i, \quad y \geq \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i f(A_i)$$

mais d'après la proposition précédente appliquée avec  $k = n+2$  on sait que

$$f(M) \leq \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i f(A_i) \leq y$$

et donc  $(M, y) \in E$ .

- (2)  $\Rightarrow$  (3). On prend  $g(x) = \min\{y : (x, y) \in \text{conv} E\}$ .
- (3)  $\Rightarrow$  (1) Clair.

$\square$

Cette proposition montre donc que l'étude d'une fonctions convexe discrète se ramène à l'étude d'une fonction définie sur  $\mathbb{R}^n$  mais ce n'est pas forcément une bonne idée.

### 3.1.2 Convexité stricte

**Définition 3.1.5** Une fonction de  $D \subset \mathbb{Z}^n$  dans  $\mathbb{R}$  est une fonction strictement convexe si et seulement si pour tout  $A_1, \dots, A_{n+1} \in D$  de  $\mathbb{Z}^2$  et tous  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  réels positifs de somme 1 on a

$$M = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i A_i \notin \{A_1 \dots A_{n+1}\} \implies f(M) < \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(A_i).$$

Si  $f$  est une fonction strictement convexe alors on peut refaire la preuve de la proposition 3.1.2 en remplaçant les inégalités (3.1) et (3.2) par des inégalités strictes. On obtient donc :

**Proposition 3.1.6** Si  $f$  est une fonction strictement convexe de  $D \subset \mathbb{Z}^n$  dans  $\mathbb{R}$  et si  $A_1, \dots, A_k \in D$  sont des points de  $\mathbb{Z}^n$  pondérés par  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  réels positifs de somme 1 alors

$$M = \sum_{i=1}^k \lambda_i A_i \notin \{A_1 \dots A_k\} \implies f(M) < \sum_{i=1}^k \lambda_i f(A_i).$$

On pourrait aussi essayer de trouver la version « stricte » de la proposition 3.1.4, mais la fonction  $g$  devra être a priori une interpolation de degré 2 de  $f$ .

## 3.2 Cas de la dimension 1

Si  $f$  est une fonction définie sur un intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{Z}$  ( $a$  et  $b$  peuvent être infinis) alors  $D^2 f$  désigne la fonction définie sur  $[a+1, b-1]$  par

$$D^2 f(i) = f(i+1) - 2f(i) + f(i-1)$$

**Proposition 3.2.1** – La fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe si et seulement si  $D^2 f(i) \geq 0$  pour tout  $i \in [a+1, b-1]$ .

– La fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement convexe si et seulement si  $D^2 f(i) > 0$  pour tout  $i \in [a+1, b-1]$ .

*Démonstration:* Si  $D^2 f(x) < 0$  on a  $f(x) < \frac{f(x-1)+f(x+1)}{2}$  et donc  $f$  n'est pas convexe.

Supposons que  $D^2 f(x) \geq 0$  pour tout  $x$ . Si on  $a \leq i < j \leq b$  on peut faire les calculs suivants :

$$\begin{aligned} f(i+2) - f(i+1) &= f(i+1) - f(i) + D^2 f(i+1) \\ f(i'+1) - f(i') &= f(i+1) - f(i) + \sum_{k=i+1}^{i'} D^2 f(k) \\ f(j) - f(i) &= \sum_{i'=i}^{j-1} (f(i'+1) - f(i')) \\ &= (j-i)(f(i+1) - f(i)) + \sum_{k=i+1}^{j-1} (j-k) D^2 f(k) \\ \frac{f(j) - f(i)}{j-i} &= f(i+1) - f(i) + \sum_{k=i+1}^{j-1} \frac{j-k}{j-i} D^2 f(k) \end{aligned}$$

De même si  $a \leq j < i \leq b$  on a

$$\frac{f(i) - f(j)}{i - j} = f(i + 1) - f(i) - \sum_{k=j+1}^i \frac{k - j}{i - j} D^2 f(k)$$

Soit  $x \in [x_1, x_2]$ , comme  $D^2 f(i) \geq 0$  et d'après les formules précédentes on a :

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \geq f(x + 1) - f(x) \geq \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

donc

$$(x - x_1)(f(x_2) - f(x)) + (x_2 - x)(f(x_1) - f(x)) \geq 0$$

d'où :

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

et donc  $f$  est convexe.

Pour la stricte convexité il suffit de remplacer les inégalités précédentes par des inégalités strictes.  $\square$

### 3.3 Minima d'une fonction strictement convexe

Une fonction strictement convexe sur  $\mathbb{R}^n$  atteint son minimum en exactement un point, on peut essayer de chercher une version discrète de cette propriété. Supposons donc que  $f$  soit une fonction strictement convexe d'un totalement convexe  $D \subset \mathbb{Z}^n$  vers  $\mathbb{R}$ .

Dans le cas  $n = 1$ , comme  $f(i + 1) - f(i)$  est une suite strictement croissante on voit que  $f$  atteint son minimum en au plus deux points qui sont alors forcément consécutifs.

En dimension 2 c'est beaucoup plus compliqué car un point de  $\mathbb{Z}^2$  n'a pas vraiment de points « voisins » qui seraient conservés par les transformations linéaires de  $\mathbb{Z}^2$  or les transformations linéaires conservent la convexité des fonctions. On peut néanmoins borner le nombre de minima d'une fonction de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 3.3.1** *Si  $f$  est une fonction strictement convexe définie sur un totalement convexe  $D \subset \mathbb{Z}^2$  alors  $f$  atteint son minimum en au plus 4 points. De plus si  $f$  atteint son minimum en 4 points alors ces 4 points forment un parallélogramme.*

En fait cette proposition est une conséquence directe du lemme suivant :

**Lemme 3.3.2** *Soit  $E$  une partie de  $\mathbb{Z}^2$  qui vérifie*

$$\forall A, B, C \in E \quad \text{conv}(A, B, C) \cap \mathbb{Z}^2 = \{A, B, C\}.$$

*alors  $E$  contient au plus 4 points. De plus si  $E$  a exactement quatre points alors  $E$  est un parallélogramme.*

En effet les points où une fonction strictement convexe atteint son minimum vérifient clairement les conditions du lemme.

*Démonstration:* Soit  $A, B, C, M$  quatre points distincts de  $E$ . Supposons d'abord que  $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| \neq 1$ . La famille  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  n'est donc pas une base de  $\mathbb{Z}^2$ . Il existe donc un

point  $N \notin \mathcal{I} = \{\alpha A + \beta B + \gamma C \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}, \alpha + \beta + \gamma = 1\}$ . On a alors  $\overrightarrow{AN} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC}$ , avec  $u$  et  $v$  non tous les deux entiers. Soit  $N' \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $\overrightarrow{AN'} = u'\overrightarrow{AB} + v'\overrightarrow{AC}$ , où  $u' = u \bmod 1$  et  $v' = v \bmod 1$ .

Si  $u' + v' \leq 1$ , alors  $N' \in \text{conv}(A, B, C)$ . On en déduit que  $N' \in \{A, B, C\}$  et donc  $N \in \mathcal{I}$  contradiction. Si  $u' + v' \geq 1$  alors le symétrique de  $N'$  par rapport à  $(BC)$  ( $B + \overrightarrow{N'C}$ ) est dans  $\text{conv}(A, B, C)$ , d'où  $N \in \mathcal{I}$  ce qui est encore une contradiction.

Donc on a  $M = \alpha A + \beta B + \gamma C$  avec  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}, \alpha + \beta + \gamma = 1$ . On définit alors trois points  $A' = -A + B + C$ ,  $B' = A - B + C$ ,  $C' = A + B - C$ . Nous allons montrer

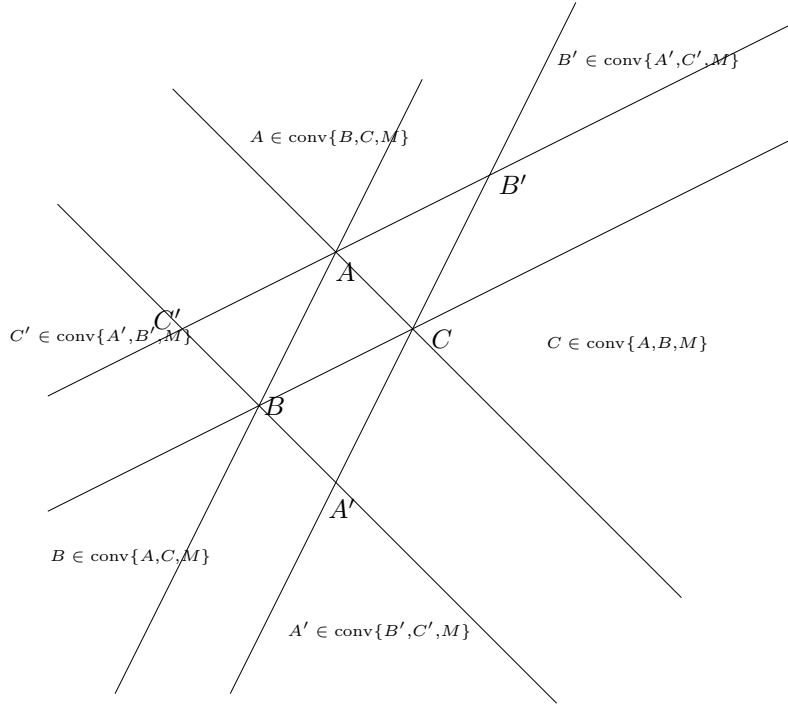


FIG. 3.2 – Où mettre le point  $M$  ?

que  $M \in \{A', B', C'\}$ . Supposons donc que ce n'est pas le cas, on a alors les possibilités suivantes : (voir figure 3.2).

- Si  $\alpha \geq 1, \beta \leq 0, \gamma \leq 0$ , alors  $A \in \text{conv}(B, C, M)$  et donc  $A \in \{B, C, M\}$ , impossible
- Si  $\alpha \leq 0, \beta \geq 1, \gamma \leq 0$ , alors  $B \in \text{conv}(A, C, M)$  impossible
- Si  $\alpha \leq 0, \beta \leq 0, \gamma \geq 1$ , alors  $C \in \text{conv}(A, B, M)$  impossible.
- Si  $\alpha \leq -1, \beta \geq 1, \gamma \geq 1$ , alors  $A' \in \text{conv}(B, C, M)$  impossible.
- Si  $\alpha \geq 1, \beta \leq -1, \gamma \geq 1$ , alors  $B' \in \text{conv}(A, C, M)$  impossible.
- Si  $\alpha \geq 1, \beta \geq 1, \gamma \leq -1$ , alors  $C' \in \text{conv}(A, B, M)$  impossible.

Donc  $M \in \{A', B', C'\}$ , autrement dit

$$\{A, B, C\} \subset E \subset \{A, B, C, A', B', C'\}$$

On ne peut pas avoir plus d'un point dans  $E \cap \{A', B', C'\}$  car le milieu de deux points parmi  $\{A', B', C'\}$  est dans  $\{A, B, C\}$  ce qui est encore impossible. Donc  $E$  est l'un des

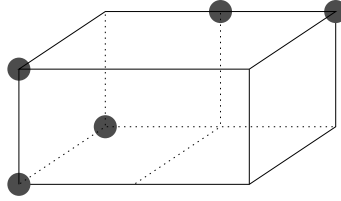


FIG. 3.3 – L'ensemble  $D = \{(1,1,1), (2,1,1), (0,1,0), (0,0,1), (0,0,0)\}$  n'est pas inclus dans les sommets d'un parallélépipède. Pourtant tout tétraèdre à sommets dans  $D$  ne contient aucun point de  $\mathbb{Z}^3$ .

parallélogrammes  $\{A, B, C, A'\}$ ,  $\{A, B, C, B'\}$ ,  $\{A, B, C, C'\}$ . On a donc bien montré que si  $|E| \geq 4$  alors  $|E| = 4$  et  $E$  forme un parallélogramme.  $\square$

**Remarque 3.3.3** Dans le début de la preuve, pour démontrer que  $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = 1$  on aurait pu utiliser le théorème de Pick (voir par exemple [GS93]) qui dit que l'aire (continue) d'un polygone  $P$  à sommets dans  $\mathbb{Z}^2$  est égal à  $I + \frac{B}{2} - 1$  où  $I$  et  $B$  désignent le nombre de points entiers respectivement à l'intérieur de  $P$  et sur le bord de  $P$ .

**Remarque 3.3.4** La proposition 3.3.1 ne s'étend pas facilement à la dimension 3. Par exemple si  $D = \{(1,1,1), (2,1,1), (0,1,0), (0,0,1), (0,0,0)\}$  alors toute fonction constante définie sur  $D$  est strictement convexe, pourtant  $D$  n'est pas inclus dans un parallélépipède. (voir figure 3.3)



# Chapitre 4

## Les points médians

Dans ce chapitre on va étudier les points médians des parties finies de  $\mathbb{Z}^2$ . Contrairement aux points saillants étudiés au chapitre 2 ces points sont situés vers l'intérieur de l'ensemble, mais paradoxalement ils n'appartiennent pas toujours à l'ensemble considéré. Dans [DLNPS98] les auteurs ont montré que les polyominos HV-convexes contenaient toujours leurs points médians selon les directions horizontales et verticales. Le but de ce chapitre est de généraliser ce résultat à des directions quelconques.

Dans une première partie on va d'abord étudier les propriétés des points médians des ensembles quelconques ensuite on verra le cas particulier des convexes.

### 4.1 Définition et premières propriétés des points médians

#### 4.1.1 Définition

Étant donnée une partie finie  $E$  de  $\mathbb{Z}^2$  et une distance  $d$  on peut définir une grandeur  $D(M)$  pour tout point  $M$  de  $\mathbb{Z}^2$  grâce à la formule

$$D(M) = \sum_{N \in E} d(M, N).$$

Plus  $D(M)$  est petit et plus  $M$  est proche de l'intérieur de  $E$ , ceci amène donc la définition suivante :

**Définition 4.1.1** *Un point  $M$  de  $\mathbb{Z}^2$  est un point médian d'une partie finie  $E$  de  $\mathbb{Z}^2$  pour la distance  $d$  si et seulement si*

$$D(M) = \min_{N \in \mathbb{Z}^2} D(N).$$

Dans ce chapitre les points médians sont toujours liés à une distance linéaire c'est à dire une distance de la forme :

$$d(M, N) = \alpha |p(\overrightarrow{MN})| + \beta |q(\overrightarrow{MN})|$$



où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux entiers strictement positifs et  $p$  et  $q$  sont des formes linéaires associées à des directions rationnelles. Comme dans la section 2.1 on peut mettre  $p$  et  $q$  sous la forme :

$$p = ax + by, q = cx + dy$$

avec  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \text{pgcd}(a, b) = 1, \text{pgcd}(c, d) = 1$ , on note aussi comme dans la section 2.1  $\delta = \det(p, q)$  que l'on suppose strictement positif et  $\kappa$  désigne l'entier donné par la proposition 2.1.1.

### 4.1.2 Projections

On peut voir qu'un point médian ne dépend que du nombre de points de  $E$  dans chaque ligne de direction  $p$  ou de direction  $q$ . Ces nombres seront étudiés en détail dans la deuxième partie de ce mémoire.

**Définition 4.1.2** *La projection de l'ensemble  $E$  selon la direction  $p$  (notée  $X_p E$  ou  $X_p$ ) est la fonction de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{N}$  définie par :*

$$X_p E(i) = |\{N \in E \mid p(N) = i\}|.$$

### 4.1.3 Caractérisation locale des points médians

Les points médians sont les points qui minimisent la fonction  $D$ . Pour vérifier si un point  $M$  est un point médian il faut donc comparer  $D(M)$  à la valeur de  $D$  pour tous les points de  $\mathbb{Z}^2$ , on va montrer dans ce paragraphe qu'il suffit en fait que  $M$  soit un point minimum de  $D$  sur un petit ensemble autour de  $M$ .

**Définition 4.1.3** *Le voisinage de zéro est l'ensemble (noté  $\mathcal{N}$ ) :*

$$\mathcal{N} = \{\vec{u} \mid \vec{u} \neq \vec{0}, -\delta < p(\vec{u}) < \delta, -\delta < q(\vec{u}) < \delta\} \cup \{\vec{u} \mid (p(\vec{u}), q(\vec{u})) \in \{(\pm\delta, 0), (0, \pm\delta)\}\}$$

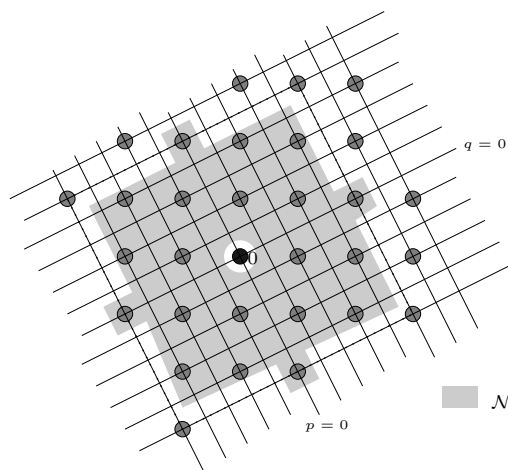


FIG. 4.1 – Le voisinage de zéro pour les directions  $p = 2x + y$  et  $q = x - 2y$ .

D'après la proposition 2.1.1 on sait que

$$\mathcal{N} = \{\langle l, m \rangle \mid -\delta < l, m < \delta, (l, m) \neq (0, 0), m \equiv \kappa l [\delta]\} \cup \{\langle \pm\delta, 0 \rangle, \langle 0, \pm\delta \rangle\},$$

et donc :

$$\begin{aligned} |\mathcal{N}| &= 4|\{(l, m) \in ]0, \delta[{}^2 \mid m \equiv \kappa l [\delta]\}| + 4 \\ &= 4(\delta - 1) + 4 \\ &= 4\delta \end{aligned}$$

Par exemple avec  $p = 2x + y$  et  $q = x - 2y$ , on a  $\delta = 5$  et donc  $|\mathcal{N}| = 20$  (voir figure 4.1).

La caractérisation locale des médians est alors la suivante :

**Théorème 4.1.4** *Un point  $M$  est un médian de  $E$  si et seulement si*

$$\forall \vec{u} \in \mathcal{N} \quad D(M + \vec{u}) \geq D(M). \quad (4.1)$$

*Démonstration:* On a :

$$D(M) = \alpha \sum_{Q \in E} |p(\overrightarrow{MQ})| + \beta \sum_{Q \in E} |q(\overrightarrow{MQ})|.$$

En séparant les termes en  $p$  et  $q$  on a

$$D(M) = DP(p(M)) + DQ(q(M))$$

où

$$\begin{aligned} DP(i) &= \alpha \sum_{i' \in \mathbb{Z}} |i - i'| X_p(i'), \\ DQ(j) &= \beta \sum_{j' \in \mathbb{Z}} |j - j'| X_q(j'). \end{aligned}$$

On définit alors

$$\begin{aligned} S_0(\langle i, j \rangle) &= S_0(i) = \sum_{i' \leq i} X_p(i') = |\{M \in E \mid p(M) \leq i\}|, \\ S_1(\langle i, j \rangle) &= S_1(j) = \sum_{j' \leq j} X_q(j') = |\{M \in E \mid q(M) \leq j\}|, \\ S_2(\langle i, j \rangle) &= S_2(i) = \sum_{i' \geq i} X_p(i') = |\{M \in E \mid p(M) \geq i\}|, \\ S_3(\langle i, j \rangle) &= S_3(j) = \sum_{j' \geq j} X_q(j') = |\{M \in E \mid q(M) \geq j\}|, \end{aligned} \quad (4.2)$$

Voir figure 4.2.

On a

$$S_0(i) + S_2(i + 1) = S_1(j) + S_3(j + 1) = |E|$$

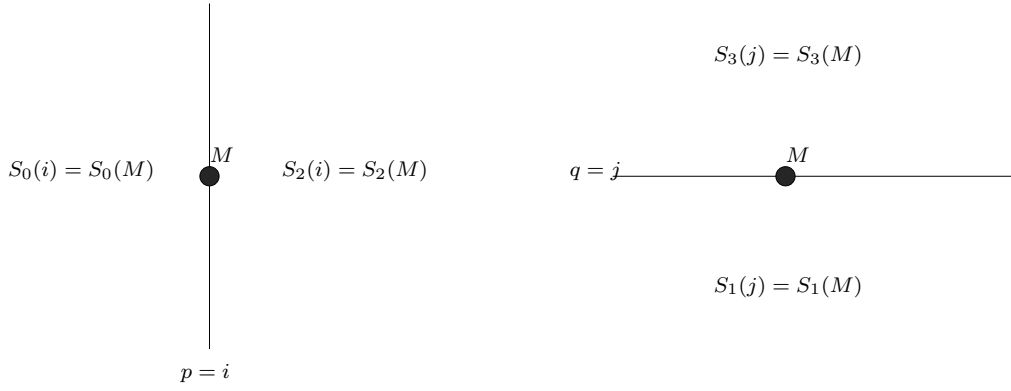


FIG. 4.2 – Les nombres  $S_i$  représentent le nombre de points de  $E$  de frontière parallèle à  $p$  ou  $q$ .

et :

$$\begin{aligned}
 DP(i+1) - DP(i) &= \alpha \sum_{i' \in \mathbb{Z}} (|i+1-i'| - |i-i'|) X_p(i') \\
 &= \alpha \left( \sum_{i' \leq i} ((i+1-i') - (i-i')) X_p(i') + \sum_{i' \geq i+1} ((i'-i-1) - (i'-i)) X_p(i') \right) \\
 &= \alpha \left( \sum_{i' \leq i} X_p(i') + \sum_{i' \geq i+1} -X_p(i') \right) \\
 &= \alpha (S_0(i) - S_2(i+1))
 \end{aligned}$$

Donc

$$DP(i+1) - DP(i) = \alpha (S_0(i) - S_2(i+1)) = \alpha (2S_0(i) - |E|) \quad (4.3)$$

De la même façon on a :

$$DQ(j+1) - DQ(j) = \beta (S_1(j) - S_3(j+1)) = \beta (2S_1(j) - |E|). \quad (4.4)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 DP(i+1) - 2DP(i) + DP(i-1) &= 2\alpha X_p(i) \geq 0, \\
 DQ(j+1) - 2DQ(j) + DQ(j-1) &= 2\beta X_q(j) \geq 0,
 \end{aligned} \quad (4.5)$$

on en déduit que  $DP, DQ$  et donc  $D$  sont des fonctions convexes. (voir figure 4.3). En particulier  $DP$  et  $DQ$  sont des fonctions décroissantes puis croissantes.

Prouvons maintenant le théorème. Si  $M$  est un point médian les conditions (4.1) sont clairement vérifiées.

Réciproquement, supposons que  $M = \langle i, j \rangle$  vérifie (4.1). Il faut montrer que  $M$  est un minimum global de  $D$ . Soit  $i''$  et  $j''$  les deux entiers vérifiant

$$\begin{aligned}
 \text{signe}(i'' - i) &= \text{signe}(i' - i) & \text{signe}(j'' - j) &= \text{signe}(j' - j), \\
 i'' &\equiv i'[\delta] & j'' &\equiv j'[\delta], \\
 -\delta &< i'' - i < \delta & -\delta &< j'' - j < \delta,
 \end{aligned}$$

(voir Fig. 4.3). D'après la proposition 2.1.1 il vient  $j' \equiv \kappa i' [\delta]$  donc on a aussi  $j'' \equiv \kappa i'' [\delta]$

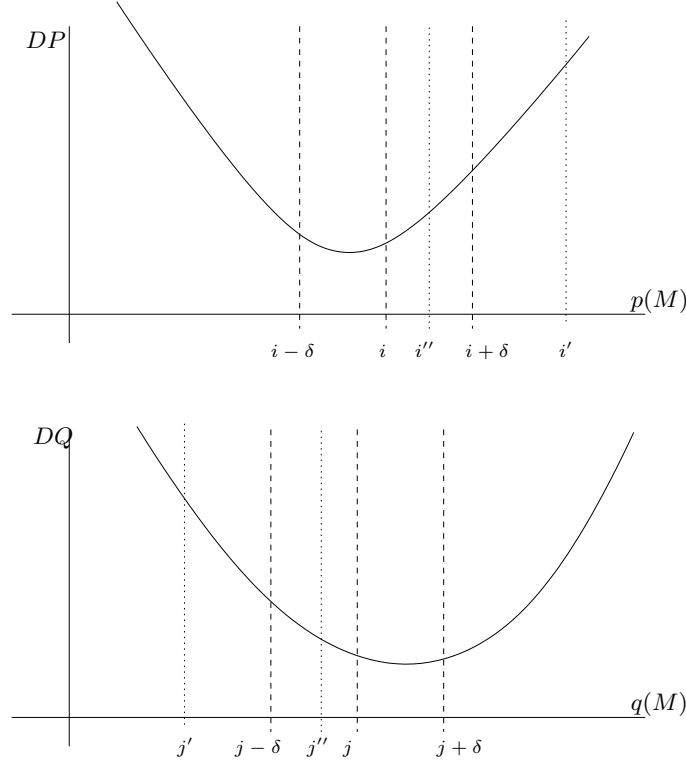


FIG. 4.3 – Les fonctions  $DP$  et  $DQ$ .

et donc  $N' = \langle i'', j'' \rangle \in \mathbb{Z}^2$ . Le point  $N'$  est construit pour que  $N' \in M + \mathcal{N}$  donc on a  $DP(i'') + DQ(j'') = D(P) \geq D(M) = DP(i) + DQ(j)$ . Supposons que  $i' \geq i + \delta$ , comme  $(+\delta, 0) \in \mathcal{N}'$ , on a  $DP(i) \leq DP(i + \delta)$ .

Comme la fonction  $DP$  est décroissante puis croissante et  $DP(i) \leq DP(i + \delta)$  la fonction  $DP$  est croissante sur  $[i + \delta, +\infty[$ . Donc  $DP(i) \leq DP(i + \delta) \leq DP(i')$ .

On a  $i \leq i'' \leq i + \delta$  donc

$$DP(i'') \leq \max(DP(i), DP(i')) = DP(i').$$

De même si  $i' \leq i - \delta$  on a aussi  $DP(i'') \leq DP(i')$ . Si  $i' \in ]i - \delta, i + \delta[$  on a  $i'' = i$  et donc on a encore  $DP(i'') \leq DP(i')$ .

De la même façon on peut prouver que  $DQ(j') \geq DQ(j'')$  et donc

$$D(N) = DP(i') + DQ(j') \geq DP(i'') + DQ(j'') \geq DP(i) + DQ(j) = D(M)$$

et  $D(M)$  est bien un minimum global de  $D$ .  $\square$

Prenons deux exemples importants de directions :

- Si on prend les directions  $p = x$  et  $q = y$  et  $\alpha = \beta = 1$ , la distance  $d$  est alors la distance de  $d_1$  définie par  $d_1(M, N) = |x_M - x_N| + |y_M - y_N|$ . Dans ce cas  $\mathcal{N} = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$  et donc le point  $M = (i, j)$  est médian si il vérifie :

$$DP(i) \leq DP(i-1), \quad DP(i) \leq DP(i+1), \quad DQ(j) \leq DQ(j-1), \quad DQ(j) \leq DQ(j+1)$$

ce qui se récrit

$$S_0(i-1) \leq \frac{|E|}{2} \leq S_0(i), \quad S_1(j-1) \leq \frac{|E|}{2} \leq S_1(j). \quad (4.6)$$

autrement dit les médians de  $M$  sont les points dont les coordonnées sont les médianes des coordonnées des points de  $E$ . (« médiane » a ici son sens statistique). On retrouve les points médians définis dans [DLNPS98].

- Si on prend les directions *diagonales*  $p = x + y$  et  $q = x - y$  alors la distance  $d$  est égale à  $2d_\infty$  où  $d_\infty(M, N) = \max(|x_M - x_N|, |y_M - y_N|)$ . Dans ce cas on a  $\mathcal{N} = \{\langle \pm 2, 0 \rangle, \langle 0, \pm 2 \rangle, \langle \pm 1, \pm 1 \rangle\}$  et donc  $M = \langle i, j \rangle$  est médian si les 8 inéquations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} S_0(i-2) + S_0(i-1) &\leq |E| \leq S_0(i) + S_0(i+1) \\ S_1(j-2) + S_1(j-1) &\leq |E| \leq S_1(j) + S_1(j+1) \\ S_0(i) + S_1(j) &\geq |E| \quad S_0(i) + S_3(j) \geq |E| \\ S_2(i) + S_1(j) &\geq |E| \quad S_2(i) + S_3(j) \geq |E| \end{aligned} \quad (4.7)$$

#### 4.1.4 Le nombre de points médians

On a déjà vu que  $D$  est une fonction convexe. Si de plus on suppose que  $E$  est insécable alors les égalités (4.5) et la proposition 3.2.1 montrent que la fonction  $D$  est strictement convexe, donc d'après la proposition 3.3.1 on a

**Proposition 4.1.5** *Si  $E$  est insécable selon les directions  $p$  et  $q$  alors  $E$  admet au plus 4 points médians. De plus si  $E$  a exactement 4 médians alors ces médians forment un parallélogramme.*

Grâce à la proposition 2.5.2 on en déduit :

**Corollaire 4.1.6** *Soit  $E$  une partie finie de  $\mathbb{Z}^2$*

- *Si  $E$  est 8-connexe alors  $E$  admet au plus 4 médians pour la distance  $d_1$ .*
- *Si  $E$  est 4-connexe alors  $E$  admet au plus 4 médians pour la distance  $d_\infty$ .*

## 4.2 Appartenance des points médians

Dans [DLNPS98] les auteurs ont montré que les polyominos HV-convexes contiennent toujours leur points médians pour la distance  $d_1$ . On va essayer de généraliser ce résultat à des directions quelconques.

Ce premier lemme donne une condition suffisante pour qu'un quadrant contienne un point :

**Lemme 4.2.1** *Si  $S_i(M) + S_{i+1}(M) > |E|$  alors  $R_i(M) \cap E$  est non vide. Si  $S_i(M) + S_{i+1}(M) \geq |E|$  et si  $R_i(M) \cap E$  est vide alors  $E$  est inclus dans  $R_{i-1}(M) \cup R_{i+1}(M)$ .*

*Démonstration:* Si  $R_i(M) \cap E = \emptyset$  alors  $S_i(M) + S_{i+1}(M) = |(R_{i-1}(M) \cup R_{i+1}(M)) \cap E|$ .

- C'est impossible si  $S_i(M) + S_{i+1}(M) > |E|$ .
- Cela entraîne  $E = E \cap (R_{i-1}(M) \cup R_{i+1}(M))$  si  $S_i(M) + S_{i+1}(M) = |E|$ . □

Ce lemme très simple à démontrer va être primordial dans ce chapitre et surtout dans le chapitre suivant sur la reconstruction.

**Théorème 4.2.2** *Si  $E$  et les directions  $p$  et  $q$  vérifient les trois conditions suivantes :*

- *L'ensemble  $E$  est  $Q$ -convexe selon  $p$  et  $q$ .*
- *Pour tout point  $M$  de  $\mathbb{Z}^2$  et  $i$  dans  $\{0,1\}$ , si  $E$  est inclus dans  $(R_i(M) \cup R_{i+2}(M)) \setminus \{M\}$  alors  $E$  est inclus dans  $R_i(M)$  ou dans  $R_{i+2}(M)$ .*
- *Les directions vérifient  $\delta = 1$  ou  $(\delta = 2, \alpha = \beta)$ .*

*alors  $E$  contient tous ses points médians selon  $p$  et  $q$ .*

*Démonstration:* Soit  $M$  un point médian de  $E$  qui ne serait pas dans  $E$ , comme  $E$  est  $Q$ -convexe, il existe  $i$  tel que  $R_i(M)$  ne contient aucun point de  $E$ .

Si  $\delta = 2$  alors les points  $\langle \pm 1, \pm 1 \rangle$  sont dans le voisinage  $\mathcal{N}$ . On en déduit que

$$DP(p(M) \pm 1) + DQ(q(M) \pm 1) \geq D(M). \quad (4.8)$$

Si  $\delta = 1$  comme  $DP(p(M) \pm 1) \geq DP(p(M))$  et  $DQ(q(M) \pm 1) \geq DQ(q(M))$  on a encore la formule (4.8).

En réunissant (4.3), (4.4) et (4.8) on voit que  $S_j(M) + S_{j+1}(M) \geq |E|$  pour tout  $j$ . En particulier  $S_i(M) + S_{i+1}(M) \geq |E|$  où  $i$  est tel que  $R_i(M) \cap E = \emptyset$ . D'après le lemme 4.2.1 on sait que  $E$  est inclus dans  $(R_{i-1}(M) \cup R_{i+1}(M)) \setminus \{M\}$ . D'après la deuxième condition on sait que  $E \subset R_{i-1}(M)$  ou  $E \subset R_{i+1}(M)$ . Supposons par exemple  $E \subset R_{i+1}(M)$ . On a alors  $S_i(M) = 0$  et comme  $S_{i-1}(M) + S_i(M) \geq |E|$  on a  $S_{i-1}(M) = |E \cap (R_{i-1}(M) \cup R_{i+2}(M))| = |E|$  donc  $E \subset R_{i-1}(M) \cup R_{i+2}(M)$ . Or  $E \subset R_{i+1}(M)$  donc  $E$  est inclus dans la demi-droite  $R_{i+1}(M) \cap R_{i+2}(M)$ ,  $E$  est donc un segment de  $\mathbb{Z}^2$  il contient donc tous ses médians, contradiction avec  $M \notin E$ .  $\square$

Si on oublie une des trois conditions alors le théorème devient faux comme le montrent les exemples de la figure 4.4.

### Corollaire 4.2.3

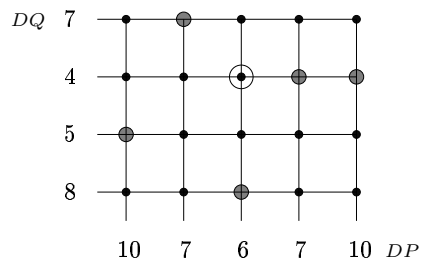
- *Si  $E$  est 4-connexe et  $HV$ -convexe alors  $E$  contient ses points médians selon  $d_1$ .*
- *Si  $E$  est 8-connexe et  $Q$ -convexe selon  $x + y$  et  $x - y$  alors  $E$  contient ses points médians selon  $d_\infty$ .*

*Démonstration:*

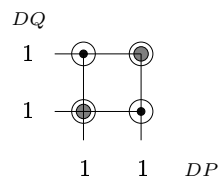
- La première condition du théorème précédent est vérifiée grâce au théorème 2.5.3. La deuxième condition vient du fait que  $E \cap R_i(M) \setminus \{M\}$  et  $E \cap R_{i+2}(M) \setminus \{M\}$  ne sont pas 4-adjacents. On a  $\delta = 1$  donc on peut appliquer le théorème précédent.
- On utilise cette fois ci que  $E \cap R_i(M) \setminus \{M\}$  et  $E \cap R_{i+2}(M) \setminus \{M\}$  ne sont pas 8-adjacents.

$\square$

Grâce au lemme 2.5.9, on peut appliquer la deuxième partie du corollaire aux ensembles 4-connexes et convexes simples selon  $x + y, x - y$ .



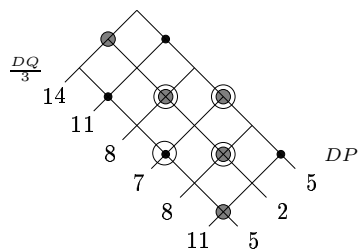
$E$  n'est pas  $Q$ -convexe



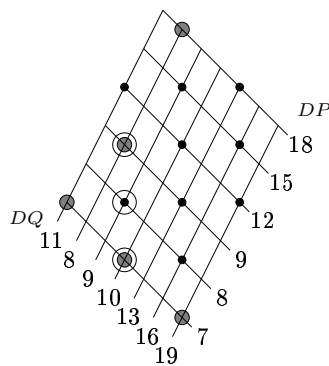
$E$  est inclus dans un  $R_i \cup R_{i+2}$

● points de  $E$

○ medians de  $E$



On prend  $\alpha = 1, \beta = 3$



Les directions  $p = x + y, q = -2x + y$  vérifient  $\delta = 3$

FIG. 4.4 – Contre-exemples à l'appartenance des médians.

### 4.3 Les médians sur chaque réseau.

Le théorème précédent est assez décevant car les conditions sur les directions sont beaucoup trop fortes. Une façon de contourner cette condition est d'étudier les médians sur chacun des  $\delta$  réseaux  $\mathcal{L}_i$  définis dans la section 2.1.1.

En effet sur  $\mathcal{L}_i$  toute droite parallèle à  $p$  coupe toute droite parallèle à  $q$ . On est donc comme dans le cas  $\delta = 1$ .

**Définition 4.3.1** Soit  $\mathcal{L}$  un des  $\delta$   $p$ - $q$  sous-réseaux. Un point  $M \in \mathcal{L}$  est un  $p$ - $q$  médian sur le réseau  $\mathcal{L}$  si  $M$  est un point médian de  $E \cap \mathcal{L}$  pour la distance  $d(M, N) = |p(\overrightarrow{MN})| + |q(\overrightarrow{MN})|$ .

Comme toute droite de direction  $p$  de  $\mathcal{L}$  se coupe avec toute droite de direction de  $q$  on en déduit que  $p(M)$  et  $q(M)$  minimisent respectivement  $DP$  et  $DQ$  calculés sur  $E \cap \mathcal{L}$ . Désormais  $DP$  et  $DQ$  sont calculés sur le réseau  $\mathcal{L}$ .

On a alors le théorème d'appartenance suivant :

**Théorème 4.3.2** Si  $E$  est un  $Q$ -convexe selon  $p$  et  $q$  et  $\mathcal{L}$  est un  $p$ - $q$  réseau tel que  $E \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$  alors :

- Si  $DP$  ou  $DQ$  admet un seul minimum alors  $E \cap \mathcal{L}$  contient tous ses points médians
- Sinon  $DP$  atteint son minimum sur  $[p_1, p_2]$  et  $DQ$  sur  $[q_1, q_2]$  avec  $p_1 < p_2$  et  $q_1 < q_2$ . Soient  $A = \langle p_1, q_1 \rangle, B = \langle p_1, q_2 \rangle, C = \langle p_2, q_2 \rangle, D = \langle p_2, q_1 \rangle$ . Les médians de  $E$  sur le réseau  $\mathcal{L}$  sont les points de  $\mathcal{L}$  contenus dans le parallélogramme  $ABCD$ . Si  $E \cap \mathcal{L}$  ne contient pas tous ses médians, alors les médians de  $E \cap \mathcal{L}$  qui sont dans  $E$  sont exactement  $A, C$  ou  $B, D$ .

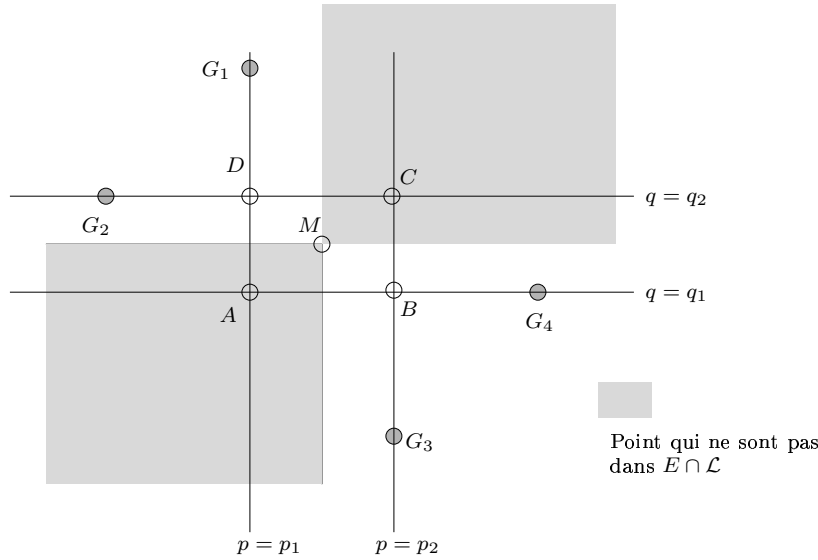
En particulier  $E \cap \mathcal{L}$  contient au moins un de ses points médians.

*Démonstration:* Soit  $M \notin E$  un point médian de  $E \cap \mathcal{L}$ . On sait qu'il existe  $i$  tel que  $R_i(M)$  ne contient aucun point de  $E$ . Supposons par exemple  $i = 0$ . Comme  $p(M)$  minimise  $DP$  et  $q(M)$  minimise  $DQ$  on a  $DP(p(M) \pm 1) \geq DP(p(M))$  et  $DQ(q(M) \pm 1) \geq DQ(q(M))$  d'où on déduit comme précédemment que  $E \subset R_3(M) \cup R_1(M)$ .

- Si  $DP$  admet un seul minimum alors on a en fait  $DP(p(M) \pm 1) > DP(p(M))$  et donc  $S_0(M) > \frac{|E|}{2}, S_2(M) > \frac{|E|}{2}$  or comme  $E \subset R_3(M) \cup R_1(M)$  on a  $S_0(M) = |E \cap \mathcal{L} \cap R_3(M)|$  et  $S_2(M) = |E \cap \mathcal{L} \cap R_1(M)|$  et donc  $S_0(M) + S_2(M) = |E|$  contradiction avec  $S_0(M) > \frac{|E|}{2}, S_2(M) > \frac{|E|}{2}$ .
- Supposons maintenant que l'on est dans le deuxième cas. On a donc  $p_1 \leq p(M) \leq p_2$  et  $q_1 \leq q(M) \leq q_2$ . Comme  $DP, DQ$  sont constantes sur  $[p_1, p_2]$  et  $[q_1, q_2]$  on en déduit qu'aucun point de  $E \cap \mathcal{L}$  ne vérifie  $p_1 < p(N) < p_2$  et  $q_1 < q(N) < q_2$ . Donc seuls les médians  $A, B, C, D$  peuvent être contenus dans  $E$ .

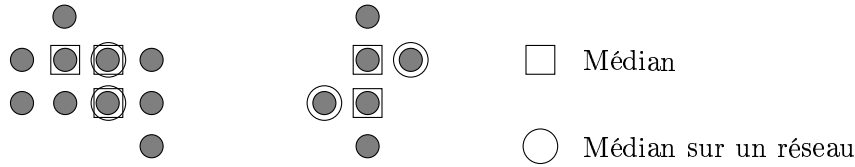
Comme  $DP(p_1 - 1) > DP(p_1) = DP(p_1 + 1)$  il y a un point  $G_1 \in E$  sur la droite  $p = p_1$  (voir formule (4.5)). Comme  $E \subset R_3(M) \cup R_1(M)$  on a  $q(G_1) \geq q_2$ . De même il existe  $G_2, G_3, G_4$  tel que  $q(G_2) = q_2, p(G_2) \leq p_1, p(G_3) = p_2, q(G_3) \leq q_1, q(G_4) = q_1, p(G_4) \geq p_2$ . On en déduit par  $Q$ -convexité que  $B$  et  $D$  sont dans  $E$ . Le point  $A$  n'est pas dans  $E$  car  $A \in R_0(M)$ . On a  $p(M) < p_2$  car sinon  $B \in R_0(M)$ , de même  $q(M) > q_2$  car sinon  $D \in R_0(M)$ . Donc  $C \notin R_3(M) \cup R_1(M) \supset E$ . Les médians appartenant à  $E$  sont donc exactement  $B$  et  $D$ . (Voir figure 4.5)



FIG. 4.5 – Pourquoi seuls  $B$  et  $D$  sont dans  $E$  ?

□

Il n'y a pas de lien direct entre les médians sur chacun des réseaux et les médians de tout l'ensemble. (voir exemples de la figure 4.6)

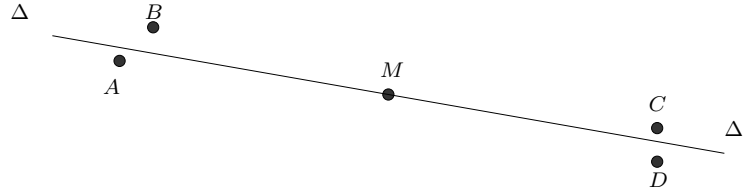
FIG. 4.6 – Ensembles dont les médians globaux sont différents des médians sur un réseau. Les directions sont  $p = x + y$  et  $q = x - y$ .

En fait cette appartenance avait déjà été trouvée par L. Sorri ([Sor97]), mais elle supposait la 4-connexité et une convexité plus compliquée que la Q-convexité :

**Définition 4.3.3** Un ensemble  $E$  est *S-convexe* (convexe selon Sorri) selon la direction  $p$  si pour tous  $A, B, C, D \in E$  et  $M \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $A$  et  $B$  sont 8-adjacents,  $C$  et  $D$  sont 8-adjacents,  $[AB] \cap \Delta \neq \emptyset$  et  $[CD] \cap \Delta' \neq \emptyset$  où  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont les deux demi-droites d'origine  $M$  et de direction  $p$  alors  $M \in E$ . (voir figure 4.7)

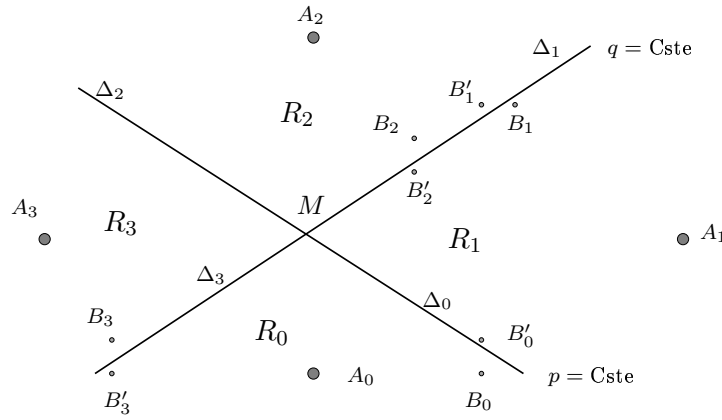
En supposant la 8-connexité cette notion est plus forte que la Q-convexité :

**Proposition 4.3.4** Si  $E$  est S-convexe selon deux directions  $p$  et  $q$  et si  $E$  est 8-connexe alors  $E$  est Q-convexe selon  $p$  et  $q$ .

FIG. 4.7 – *S-convexité*

*Démonstration:* On utilise les mêmes idées que pour la démonstration du théorème 2.5.3.

Soit  $M$  un point de  $\mathbb{Z}^2$  tel que tous les  $R_i(M)$  contiennent un point  $A_i \in E$ . En considérant un 8-chemin entre  $A_i$  et  $A_{i+1}$  on sait qu'il existe deux points 8-adjacents  $B_i$  et  $B'_i$  vérifiant  $B_i \in R_i$ ,  $B'_i \in \bigcup_{j \neq i} R_j$ . (voir figure 4.8)

FIG. 4.8 – *Pourquoi M est-il dans E ?*

Notons  $\Delta_i$  la demi-droite  $R_i(M) \cap R_{i+1}(M)$ . On sait que  $[B_i B'_i] \cap \Delta_i \neq \emptyset$  ou  $[B_i B'_i] \cap \Delta_{i-1} \neq \emptyset$ .

Supposons qu'il existe  $k$  et  $l$  tels que  $[B_k B'_k] \cap \Delta_0 \neq \emptyset$  et  $[B_l B'_l] \cap \Delta_2 \neq \emptyset$  alors par S-convexité selon  $p$  on a  $M \in E$ .

Si pour tout  $k$   $[B_k B'_k] \cap \Delta_0 = \emptyset$  alors on sait que  $[B_1 B'_1] \cap \Delta_1 \neq \emptyset$  et  $[B_0 B'_0] \cap \Delta_3 \neq \emptyset$  et donc  $M \in E$  par S-convexité selon  $q$ .

De même si pour tout  $k$   $[B_k B'_k] \cap \Delta_2 = \emptyset$  alors on sait que  $[B_3 B'_3] \cap \Delta_3 \neq \emptyset$  et  $[B_2 B'_2] \cap \Delta_1 \neq \emptyset$  et donc  $M \in E$ .

Dans tous les cas  $M \in E$ . □

**Remarque 4.3.5** La réciproque est fausse : l'ensemble de la figure 4.9 est 4-connexe et  $Q$ -convexe selon  $x - 2y$  et  $x - 3y$  mais il n'est pas  $S$ -convexe selon la direction  $x - 2y$ .

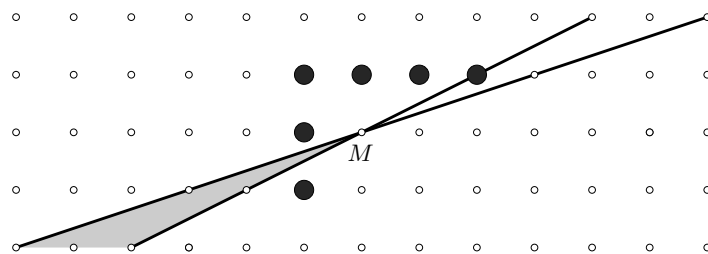


FIG. 4.9 – Un ensemble 4-connexe et  $Q$ -convexe selon  $\{x-2y, x-3y\}$  mais non  $S$ -convexe selon  $x-2y$ .

# Deuxième partie

## Reconstruction



# Introduction

## 1 Tomographie continue (*computerized tomography*)

La densité d'un objet 3-D peut souvent être mesurée par une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ . Parfois la fonction  $f$  ne peut pas être trouvée directement mais, par contre, on peut mesurer l'atténuation d'un rayon qui traverse l'objet.

Revenons pour simplifier au cas 2-D. Si le rayon est la droite de vecteur directeur unitaire  $\vec{u}$  et passant par  $M$  alors, dans les cas les plus simples, la quantité mesurée pour ce rayon est exactement :

$$X_{\vec{u}}(M) = \int_{-\infty}^{\infty} f(M + t\vec{u})dt.$$

La fonction  $X_{\vec{u}}$  est appelée projection selon la direction de vecteur  $\vec{u}$ . La reconstruction consiste donc à déterminer  $f$  à partir des quantités  $X_{\vec{u}}(M)$ . En 2-D les projections correspondent exactement à la transformée de Radon introduite au début du 20<sup>ème</sup> siècle. Cette transformée a été (et est encore) très étudiée. La base des méthodes de reconstruction consiste en des formules d'inversion qui donnent formellement  $f$  en fonction des  $X_{\vec{u}}$ . (voir par exemple [Tof96]).

## 2 Tomographie géométrique

Le grand défaut de la tomographie continue est que l'on doit souvent considérer les projections selon toutes les directions. Un moyen de diminuer ce nombre de directions est d'imposer des conditions sur  $f$ . On peut supposer par exemple que l'objet cherché est homogène. Dans ce cas là la fonction  $f$  est à valeurs dans  $\{0,1\}$  : c'est la fonction caractéristique d'un ensemble  $E$ .

La projection de  $E$  peut alors être définie plus simplement : la projection selon la direction  $p = cste$  est :

$$X_p(t) = \mu(\{M \in E : p(M) = t\})$$

où  $\mu$  est la mesure de Lebesgue de dimension 1.

On peut aussi imposer d'autres contraintes sur  $E$  comme par exemple la convexité. En 1963, Hammer a posé le problème suivant : combien de directions sont nécessaires pour déterminer complètement un ensemble convexe à partir des projections selon ces directions? ([Ham63])

Ce problème a été résolu complètement en dimension 2 : un ensemble de directions détermine tous les convexes si et seulement si ce ne sont pas les directions des arêtes

d'un polygone régulier à une transformation affine près ([GM80]). Par contre ce résultat ne donne pas un moyen de calculer l'ensemble à partir des projections. Des algorithmes existent malgré tout ([KKV89], [Gar95, théorème 1.2.28]) mais ils ne sont pas encore satisfaisants du point de vue théorique ([Gar95, note 1.2]).

### 3 Tomographie discrète

Cette fois-ci on se donne un ensemble  $E$  dans  $\mathbb{Z}^2$ . La projection de  $E$  selon la direction  $p$  est alors tout simplement le nombre de points dans chaque droite de direction  $p$ :

$$X_p E(i) = |\{N \in E : p(N) = i\}|.$$

Si on a une certaine classe  $\mathcal{F}$  de parties de  $\mathbb{Z}^2$  alors le problème de la reconstruction selon un ensemble  $\mathcal{D}$  de directions s'énonce facilement :

RECONSTRUCTION( $\mathcal{F}, \mathcal{D}$ ).

Donnée :  $|\mathcal{D}|$  suites  $((p_i)_{i \in \mathbb{Z}}, p \in \mathcal{D})$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et à support fini.

Sortie : Un ensemble  $E \in \mathcal{F}$ , si il existe, dont les projections vérifient  $\forall p \in \mathcal{D} \forall i \in \mathbb{Z} X_p(i) = p_i$

On a aussi le problème décisionnel associé :

EXISTENCE( $\mathcal{F}, \mathcal{D}$ ).

Donnée :  $|\mathcal{D}|$  suites  $((p_i)_{i \in \mathbb{Z}}, p \in \mathcal{D})$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et à support fini.

Question : Existe-t-il une ensemble  $E \in \mathcal{F}$  dont les projections vérifient  $\forall p \in \mathcal{D} \forall i \in \mathbb{Z} X_p(i) = p_i$

Un algorithme qui résout RECONSTRUCTION( $\mathcal{F}, p, q$ ) résout aussi EXISTENCE( $\mathcal{F}, p, q$ ).

Réciproquement un algorithme qui résout EXISTENCE peut très souvent être adapté pour donner une solution et donc résoudre RECONSTRUCTION.

On connaît principalement deux cas où RECONSTRUCTION peut être résolu en temps polynomial :

- La reconstruction d'ensembles quelconques avec deux projections (RECONSTRUCTION( $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2), \mathcal{D}$ ) avec  $|\mathcal{D}| = 2$ ) résolue par Ryser ([Rys63]).
- La reconstruction d'ensembles HV-convexes et 4-connexes avec les projections horizontales et verticales résolue par Barucci et al. ([BDLNP96]).

Un des buts de toute la deuxième partie de cette thèse est de trouver d'autres classes pour lesquelles la reconstruction peut se faire en temps polynomial.

On trouvera dans la section 8.1.1 différentes complexités connues du problème RECONSTRUCTION.

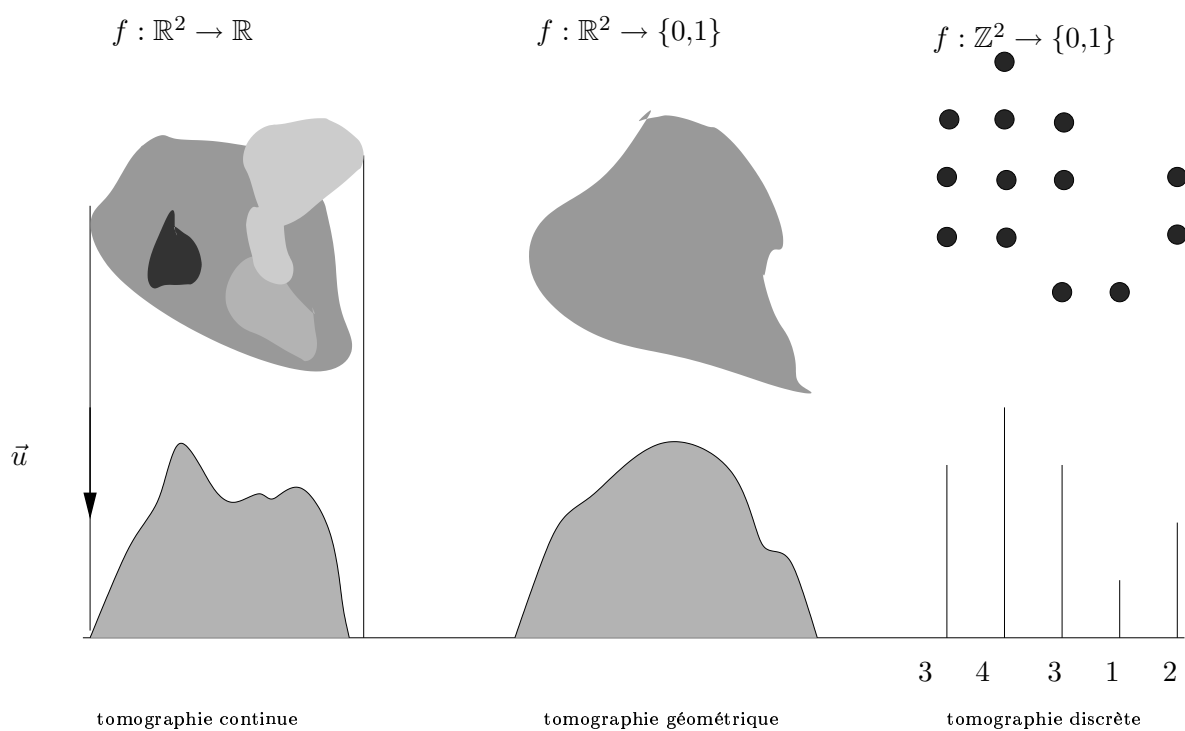


FIG. 1 – Les 3 types de tomographie.





# Chapitre 5

## Reconstruction des Q-convexes

Désignons par  $\mathcal{Q}(p,q)$  la classe des ensembles finis Q-convexes selon les directions  $p$  et  $q$ . Le but de ce chapitre est de décrire un algorithme polynomial pour résoudre  $\text{RECONSTRUCTION}(\mathcal{Q}(p,q),\{p,q\})$ . C'est l'issue d'un travail commun avec Sara Brunetti.

Dans tout ce chapitre, on se fixe donc deux directions  $p$  et  $q$  et deux suites d'entiers à support fini  $(p_i)$  et  $(q_j)$ . On peut donc définir

$$\begin{aligned} pmin &= \min\{i : p_i > 0\}, & pmax &= \max\{i : p_i > 0\} \\ qmin &= \min\{j : q_j > 0\}, & qmax &= \max\{j : q_j > 0\} \\ lp &= pmax - pmin + 1, & lq &= qmax - qmin + 1; \end{aligned}$$

Toute solution  $E$  est incluse dans le parallélogramme  $\Delta = \{\langle i,j \rangle : pmin \leq i \leq pmax \text{ et } qmin \leq j \leq qmax\}$ .

D'autre part on sait que le cardinal de  $E$  va être égal à :

$$A = \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}} q_j \tag{5.1}$$

donc si (5.1) n'est pas vérifiée on sait qu'il n'y aura pas de solution. Dans la suite on suppose donc que (5.1) est vérifiée.

### 5.1 Opérations de complétion

Pour reconstruire les Q-convexes  $E$  qui ont les bonnes projections on va utiliser un algorithme glouton : on considère toujours une borne inférieure des solutions  $\alpha \subset E$  appelée « noyau » et une borne supérieure  $\beta \supset E$  appelée « coquille ». Tout l'algorithme consiste donc à augmenter  $\alpha$  et à diminuer  $\beta$  et à espérer qu'ils deviennent le plus proches possible.

On considère donc dans cette section deux parties  $\alpha, \beta$  de  $\mathbb{Z}^2$  et l'ensemble  $\mathcal{E}(\alpha, \beta)$  des parties  $E \in \mathcal{Q}(p,q)$  ayant pour projection  $(p_i)$  et  $(q_j)$  et tels que

$$\alpha \subset E \subset \beta.$$

Les opérations de complétion vont permettre de trouver  $\alpha', \beta'$  tels que pour tout  $E \in \mathcal{E}(\alpha, \beta)$  on a

$$\alpha \subset \alpha' \subset E \subset \beta' \subset \beta.$$

autrement dit  $\mathcal{E}(\alpha, \beta) = \mathcal{E}(\alpha', \beta')$ .

On définit d'abord les opérations qui s'effectuent séparément sur chaque droite  $p = i$ . Pour cela on note  $\alpha_i$  l'intersection de  $\alpha$  avec la droite  $p = i$ , et  $\alpha^j$  l'intersection de  $\alpha$  avec la droite  $q = j$ ,  $\beta_i$  l'intersection de  $\beta$  avec la droite  $p = i$ , et  $\beta^j$  l'intersection de  $\beta$  avec la droite  $q = j$ .

On définit aussi :

$$g(\alpha_i) = \min_{M \in \alpha_i} q(M), \quad d(\alpha_i) = \max_{M \in \alpha_i} q(M), \quad g(\beta_i) = \min_{M \in \beta_i} q(M), \quad d(\beta_i) = \max_{M \in \beta_i} q(M).$$

Voici les opérations classiques  $\oplus, \otimes, \ominus, \odot$  décrites dans [BDLNP96] mais *adaptées* aux directions quelconques ( $\delta$  désigne  $\det(p, q)$ ):

- Si  $\alpha_i \neq \emptyset$  alors  $\oplus \alpha_i = \{\langle i, j \rangle : g(\alpha_i) \leq j \leq d(\alpha_i)\}$ .
- $\otimes \alpha_i = \{\langle i, j \rangle : d(\beta_i) - \delta p_i < j < g(\beta_i) + \delta p_i\}$
- Si  $\alpha_i \neq \emptyset$ ,  $\langle i, j' \rangle \notin \beta_i$  avec  $j' \leq g(\alpha_i)$  alors  $\ominus \beta_i = \{\langle i, j \rangle \in \beta_i : j > j'\}$ .  
Si  $\alpha_i \neq \emptyset$ ,  $\langle i, j' \rangle \notin \beta_i$  est tel que  $j' \geq d(\alpha_i)$  alors  $\ominus \beta_i = \{\langle i, j \rangle \in \beta_i : j < j'\}$ .
- Si  $\alpha_i \neq \emptyset$  alors  $\odot \beta_i = \{\langle i, j \rangle \in \beta_i : d(\alpha_i) - \delta p_i < j < g(\alpha_i) + \delta p_i\}$ .

On va aussi définir deux nouvelles opérations  $\odot'$  et  $\odot''$  qui éliminent des points sur les droites  $\beta_i$ :

- Si  $p_i = 0$  alors  $\odot' \beta_i = \emptyset$ .
- Si  $\langle i, j' \rangle, \langle i, j'' \rangle \notin \beta$  avec  $0 < j'' - j' \leq \delta p_i$  alors  $\odot'' \beta_i = \{\langle i, j \rangle \in \beta_i : j < j' \text{ ou } j > j''\}$ .

(La dernière opération supprime donc les séquences de moins de  $p_i$  points consécutifs de  $\beta_i$ ) On définit de même les opérations sur  $\alpha^j$  et  $\beta^j$ .

On va enfin rajouter deux opérations globales  $\oplus'$  et  $\ominus'$ . On rappelle que les suites  $S_k(M)$  définies par les formules (4.2) ne dépendent que des projections et peuvent donc être calculées avec les suite  $(p_i)$  et  $(q_j)$ .

Soit  $M = \langle i_M, j_M \rangle$  tel que pour tout  $k$  on  $R_k(M) \cap \alpha \neq \emptyset$  ou  $S_k(M) + S_{k+1}(M) > A$

- Si  $M \in \mathbb{Z}^2$  alors  $\oplus' \alpha = \alpha \cup \{M\}$ .
- Si  $M \notin \mathbb{Z}^2$  alors
  - Si  $p_{i_M} \neq 0$  alors  $\ominus' \beta_{i_M} = \{\langle i_M, j \rangle \in \beta_{i_M} : j_M - \delta p_{i_M} < j < j_M + \delta p_{i_M}\}$
  - Si  $q_{j_M} \neq 0$  alors  $\ominus' \beta^{j_M} = \{\langle i, j_M \rangle \in \beta^{j_M} : i_M - \delta q_{j_M} < i < i_M + \delta q_{j_M}\}$

(voir figure 5.2)

Il faut maintenant montrer que ces opérations sont valides :

**Lemme 5.1.1** *Pour tout  $\odot_1 \in \{\oplus, \otimes, \oplus'\}$ ,  $\odot_2 \in \{\ominus, \odot, \odot', \odot'', \ominus'\}$  on a  $\mathcal{E}(\odot_1 \alpha, \odot_2 \beta) = \mathcal{E}(\alpha, \beta)$ .*

*Démonstration:* Comme  $\odot_1 \alpha \supset \alpha$  et  $\odot_2 \beta \subset \beta$  on a toujours  $\mathcal{E}(\odot_1 \alpha, \odot_2 \beta) \subset \mathcal{E}(\alpha, \beta)$ .

Pour les opérations différentes de  $\oplus'$  et  $\ominus'$  la convexité simple suffit pour montrer que  $\mathcal{E}(\alpha, \beta) \subset \mathcal{E}(\odot_1 \alpha, \odot_2 \beta)$ .

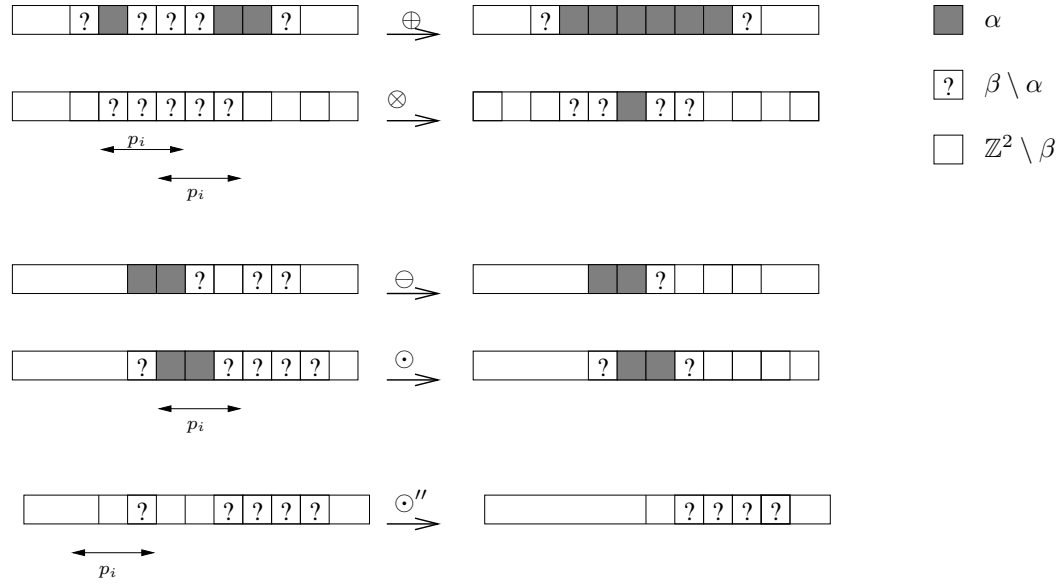


FIG. 5.1 – Les opérations de complétion sur chaque ligne

Démontrons le lemme pour les opérations  $\oplus'$  et  $\ominus'$  on suppose que  $E \in \mathcal{E}(\alpha, \beta)$  et  $M = \langle i_M, j_M \rangle$  est un point de  $\mathbb{Q}^2$  vérifiant  $R_k(M) \cap \alpha \neq \emptyset$  ou  $S_k(M) + S_{k+1}(M) > A$  pour tout  $k$ . Grâce au lemme 4.2.1 on sait que pour tout  $k$  on a  $R_k(M) \cap E \neq \emptyset$ . Donc si  $M \in \mathbb{Z}^2$ , par Q-convexité de  $E$  on a  $M \in E$ : le lemme est démontré pour l'opération  $\oplus'$ .

Supposons que  $M \notin \mathbb{Z}^2$ . Soit  $A, B \in \mathbb{Z}^2$  les points de la droite  $p = i_M$  entourant  $M$ , c'est à dire tels que  $q(B) - q(A) = \delta$  et  $q(A) < j_M < q(B)$ . On suppose  $p_{i_M} > 0$ . Il existe donc un point  $N \in E$  tel que  $p(N) = i$ . Si  $q(N) \leq q(M)$  alors en fait  $q(N) \leq q(A)$  donc  $N \in R_0(A)$  et  $N \in R_1(A)$ . On a  $R_2(A) \cap E \neq \emptyset$  car  $R_2(M) \subset R_2(A)$ . De même  $R_3(A) \cap E \neq \emptyset$ . Donc tous les  $R_i(A)$  contiennent un point de  $E$  donc  $A \in E$ . De même si  $q(N) \geq q(M)$  alors  $B \in E$ . (voir figure 5.3)

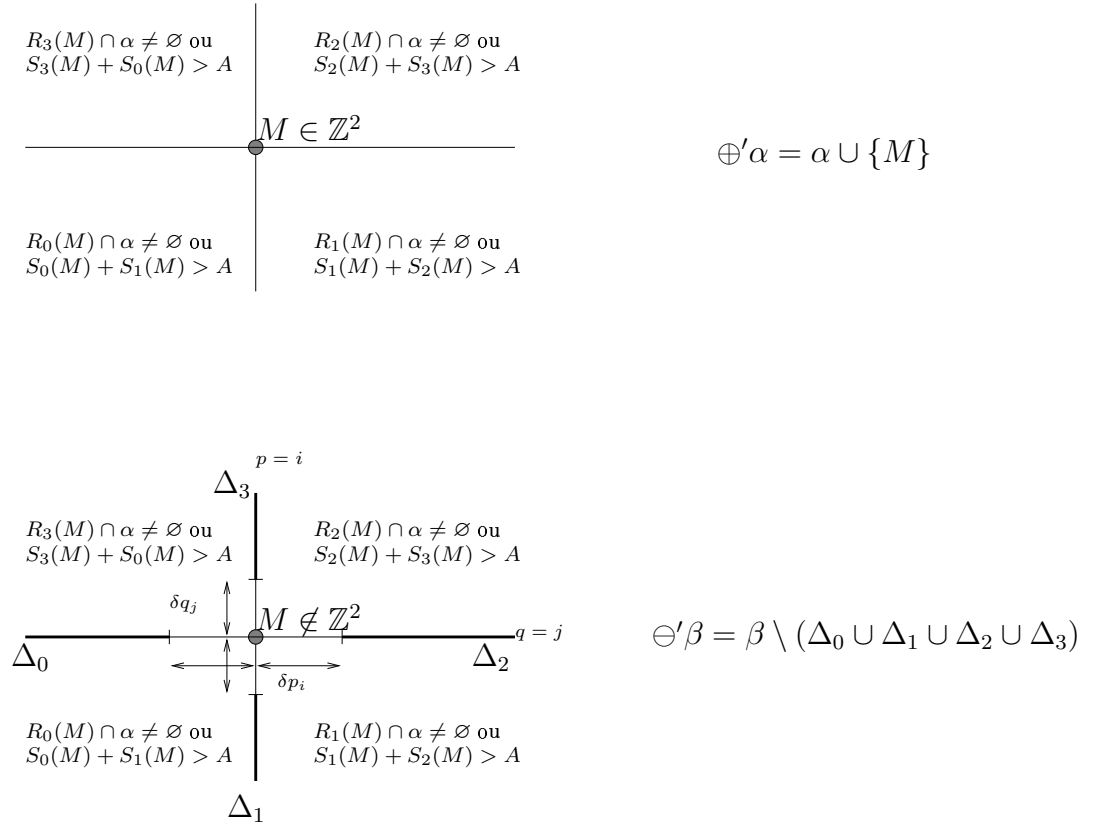
Donc  $\{A, B\} \cap E \neq \emptyset$  donc tout point  $N \in E$  sur la droite  $p = i$  vérifie  $q(B) - \delta p_{i_M} \leq q(N) \leq q(A) + \delta p_{i_M}$ , et donc on a bien  $E \subset \ominus' \beta$ .  $\square$

Effectuer toutes opérations de complétion peut se faire en  $O(lplq(lp + lq))$ : les opérations sur les lignes peuvent se faire en  $O(lplq)$ . Pour les opérations  $\oplus'$  et  $\ominus'$ , on voit que l'on peut calculer les booléens  $V_i(M) = "R_i(M) \cap E_0 \neq \emptyset \text{ ou } S_i(M) + S_{i+1}(M) > A"$  incrémentalement comme on l'a fait pour l'enveloppe Q-convexe. Ce calcul prend donc  $O(lplq)$  opérations. Une fois calculées ces variables l'opération  $\oplus'$  prend aussi  $O(lplq)$  opérations et l'opération  $\ominus'$   $O(lplq(lp + lq))$  opérations.

Pour avoir  $\alpha, \beta$  invariants par les opérations il faut répéter les opérations au plus  $|\Delta|$  fois car à chaque fois que l'on effectue une opération changeant  $\alpha$  ou  $\beta$ , on fait baisser strictement  $|\beta \setminus \alpha|$ . On en déduit

**Lemme 5.1.2** *Pour tout  $\alpha_0, \beta_0$  on peut trouver en  $O((lplq)^2(lp + lq))$  opérations  $\alpha, \beta$  stables par les opérations de complétion et tels que  $\mathcal{E}(\alpha, \beta) = \mathcal{E}(\alpha_0, \beta_0)$ .*

**Remarque 5.1.3** *On peut obtenir  $\alpha$  et  $\beta$  invariants par toutes les opérations sauf  $\ominus'$  en  $O((lplq)^2)$ .*

FIG. 5.2 – Les opérations  $\oplus'$  et  $\ominus'$ .

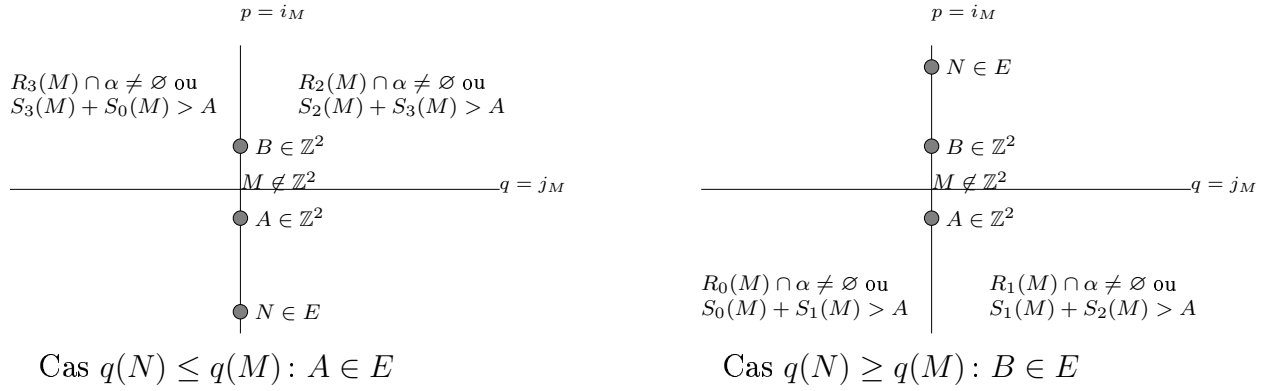
**Remarque 5.1.4** Dans [Geb98] l'auteur donne une méthode pour obtenir  $\alpha$  et  $\beta$  invariants par les opérations  $\oplus, \ominus, \otimes, \odot$  en  $O(lplq \log(lplq))$  opérations. Malheureusement cette algorithme ne s'étend pas simplement pour l'opération  $\odot''$ .

On pourrait appliquer ce lemme avec  $\alpha_0 = \emptyset$  et  $\beta_0 = \Delta$ . Malheureusement si on prend par exemple  $(p_i) = (q_j) = (1, 1, 1, 1)$ , alors aucune opération de complétion ne modifie ni  $\alpha$ , ni  $\beta$ .

On est donc obligé de rajouter des points dans  $\alpha$ . En fait on va seulement choisir des points qui extrémisent  $p$ . On prend donc  $\alpha_0 = \{U_1, U_2\}$  avec  $p(U_1) = pmin$  et  $q(U_2) = qmax$ . Il y a au plus  $lq^2$  possibilités pour de tels  $\alpha_0$ . Soit alors  $\alpha, \beta$  donnés par le lemme 5.1.2 avec  $\alpha_0 = \{U_1, U_2\}, \beta_0 = \Delta$ . Si on a  $\alpha \not\subset \beta$  alors on sait que  $\mathcal{E}(\alpha_0, \beta_0) = \emptyset$ . On suppose désormais

$$\{U_1, U_2\} = \alpha_0 \subset \alpha \subset \beta \subset \beta_0 = \Delta.$$

Dans la suite on va traiter le cas  $q(U_1) \leq q(U_2)$ . (De toute façon on peut se ramener à ce cas en remplaçant  $q$  par  $-q$ .)

FIG. 5.3 – Pourquoi  $E$  contient-t-il  $A$  ou  $B$  ?

## 5.2 Les types des droites

On va montrer que  $\alpha$  et  $\beta$  prennent des formes très particulières sur chaque droite  $p = i$  ou  $q = j$ .

La droite  $p = i$  sera dite de type :

- $t0$ , si  $\beta_i = \emptyset$
- $t1$ , si  $\alpha_i \neq \emptyset$ , on a alors :

$$\alpha_i = \{\langle i, j \rangle : g(\alpha_i) \leq j \leq d(\alpha_i)\}$$

$$\beta_i = \{\langle i, j \rangle : g(\alpha_i) - \delta(p_i - |\alpha_i|) \leq j \leq d(\alpha_i) + \delta(p_i - |\alpha_i|)\}$$

- $t2$ , si  $\alpha_i = \emptyset$  et  $\beta_i$  est constitué de  $2p_i$  points consécutifs. On a alors :

$$\beta_i = \{\langle i, j \rangle : g(\beta_i) \leq j < g(\beta_i) + 2\delta p_i\}$$

- $t3$ , si  $\alpha_i = \emptyset$  et  $\beta_i$  est constitué de deux suites distinctes de  $p_i$  points consécutifs.

On a :

$$\beta_i = \{\langle i, j \rangle : g(\beta_i) \leq j < g(\beta_i) + \delta p_i \text{ ou } d(\beta_i) - \delta p_i < j \leq d(\beta_i)\} \text{ avec } d(\beta_i) - g(\beta_i) \geq 2p_i$$

<div> <div>●</div> <div>∈</div> <div>α</div> </div> <div> <div>●</div> <div>∈</div> <div>β-α</div> </div> <div> <div>○</div> <div>∉</div> <div>β</div> </div>	<table> <tr> <td><math>t0</math></td> <td>○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○</td> <td><math>p_i=0</math></td> </tr> <tr> <td><math>t1</math></td> <td>○ ○ ○ ○ ● ○ ○ ○ ○ ○</td> <td><math>p_i=2</math></td> </tr> <tr> <td><math>t2</math></td> <td>○ ○ ○ ○ ● ● ● ● ● ○ ○</td> <td><math>p_i=2</math></td> </tr> <tr> <td><math>t3</math></td> <td>○ ○ ○ ● ● ○ ○ ○ ● ● ○</td> <td><math>p_i=2</math></td> </tr> </table>	$t0$	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	$p_i=0$	$t1$	○ ○ ○ ○ ● ○ ○ ○ ○ ○	$p_i=2$	$t2$	○ ○ ○ ○ ● ● ● ● ● ○ ○	$p_i=2$	$t3$	○ ○ ○ ● ● ○ ○ ○ ● ● ○	$p_i=2$
$t0$	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	$p_i=0$											
$t1$	○ ○ ○ ○ ● ○ ○ ○ ○ ○	$p_i=2$											
$t2$	○ ○ ○ ○ ● ● ● ● ● ○ ○	$p_i=2$											
$t3$	○ ○ ○ ● ● ○ ○ ○ ● ● ○	$p_i=2$											

FIG. 5.4 – Les différents types de droite

On peut définir de la même façon les types  $t0, t1, t2, t3$  sur les droites  $q = j$ .

**Lemme 5.2.1** Pour tout  $i \in \{pmin, \dots, pmax\}$ , tel que  $p_i \neq 0$  il existe  $j$  tel que  $S_1(\langle i, j \rangle) + S_2(\langle i, j \rangle) > A$  et  $S_3(\langle i, j \rangle) + S_0(\langle i, j \rangle) > A$ .

*Démonstration:* Soit  $j_{min} = \min\{j : S_1(j) + S_2(i) > A\}$ . Donc

$$\begin{aligned} S_1(j_{min} - 1) + S_2(i) &\leq A \\ A - S_3(j_{min}) + A - S_0(i - 1) &\leq A \\ S_3(j_{min}) + S_0(i - 1) &\geq A \end{aligned}$$

Comme  $p_i > 0$  on a  $S_0(i) = S_0(i - 1) + p_i > S_0(i - 1)$ , et donc  $S_3(j_{min}) + S_0(i) > A$ .  $\square$

**Lemme 5.2.2** *Les droites  $p = i$  sont de type  $t0$ ,  $t1$  ou  $t2$ .*

*Démonstration:* Si  $p_i = 0$  alors grâce à l'opération  $\odot'$  on sait que  $\alpha_i = \emptyset$  est donc  $p = i$  est de type  $t0$ .

Si  $p_i \neq 0$ , on peut appliquer le lemme précédent. On sait qu'il existe  $j_0$  tel que  $S_1(\langle i, j_0 \rangle) + S_2(\langle i, j_0 \rangle) > A$  et  $S_3(\langle i, j_0 \rangle) + S_0(\langle i, j_0 \rangle) > A$ . On définit alors  $j_1$  de la façon suivante :

- Si  $q(U_1) \leq j_0 \leq q(U_2)$  alors  $j_1 = j_0$ .
- Si  $j_0 < q(U_1)$  alors  $j_1 = q(U_1)$ .
- Si  $j_0 > q(U_2)$  alors  $j_1 = q(U_2)$ .

Le point  $M = \langle i, j_1 \rangle$  vérifie donc  $\forall k \ R_k(M) \cap \{U_1, U_2\} \neq \emptyset$  ou  $S_k(M) + S_{k+1}(M) > A$ . (voir figure 5.5)

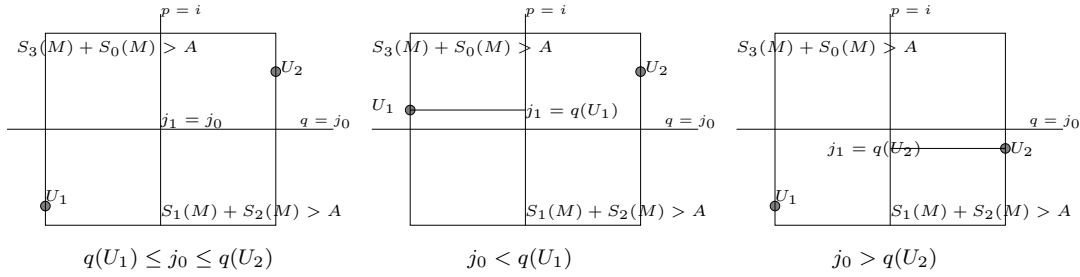


FIG. 5.5 – On peut toujours appliquer l'opération  $\oplus'$  ou  $\ominus'$  sur chaque droite  $p = i$ .

Si  $M \in \mathbb{Z}^2$  alors grâce à l'opération  $\oplus'$  on sait que  $M \in \alpha$  et donc la ligne  $p = i$  est de type  $t1$ .

Si  $M \notin \mathbb{Z}^2$  alors on peut effectuer l'opération  $\ominus'$  et donc la ligne  $p = i$  est de type  $t2$ .  $\square$

Il reste à montrer que les droite  $q = j$  sont aussi de type  $ti$ .

**Lemme 5.2.3** *Les droites  $q = j$  sont de type  $t0, t1, t2$  ou  $t3$ .*

*Démonstration:* Grâce au lemme précédent on sait que sur chaque ligne  $p = i$  on a

$$|\beta_i| = 2p_i - |\alpha_i|$$

En sommant toutes ces égalités on a donc :

$$|\beta| = 2A - |\alpha|, \tag{5.2}$$

Sur les droites  $q = j$ , grâce aux opérations  $\otimes$  et  $\odot''$  on sait que

$$|\beta^j| \geq 2q_j - |\alpha^j|$$

et donc

$$|\beta| = \sum_j |\beta^j| \geq \sum_j (2q_j - |\alpha^j|) = 2A - |\alpha|.$$

Comme on a l'égalité (5.2) on en déduit que pour tout  $j$  on a

$$|\beta^j| = 2q_j - |\alpha^j|$$

Si  $|\alpha^j| > 0$  on sait déjà que  $q = j$  est de type  $t1$ . Supposons que  $\alpha_j = \emptyset$ . Grâce à l'opération  $\odot''$  on sait que les suites de points consécutifs de  $\beta_j$  ont au moins  $p_i$  points, comme on a  $|\beta^j| = 2q_j$  il y a au plus deux telles suites. S'il y a une seule suite la droite  $q = j$  est de type  $t2$ . S'il y en a deux alors elles ont toutes les deux  $p_i$  points et donc la ligne est de type  $t3$ .  $\square$

**Remarque 5.2.4** Les deux lemmes précédents sont encore vrais si on suppose seulement  $\alpha$  et  $\beta$  invariants par les opérations opérant sur les lignes  $(\oplus, \ominus, \otimes, \odot, \odot', \odot'')$  à condition toutefois d'avoir préalablement effectué une fois les opérations  $\oplus', \ominus'$ . D'après la remarque 5.1.3 on peut donc arriver à une configuration où toutes les droites sont de type  $t_i$  en  $O((lplq)^2)$  opérations.

Pour l'algorithme de ce chapitre il est inutile de faire cette optimisation car la prochaine étape aura de toute façon une complexité en  $O((lplq)^2(lp + lq))$ .

**Remarque 5.2.5** Si on n'effectue pas l'opération  $\odot''$  alors le lemme 5.2.3 est faux. En effet si on prend  $p = x$  et  $q = y$  alors la configuration donnée par la figure 5.6 est stable par toutes les opérations sauf l'opération  $\odot''$ .

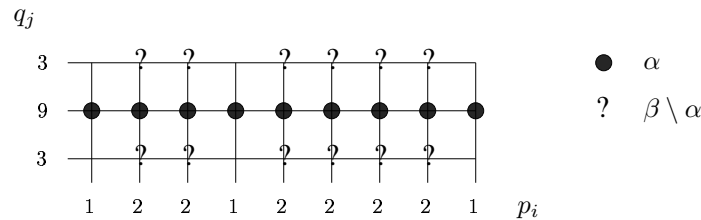


FIG. 5.6 – Exemple montrant la nécessité de l'opération  $\odot''$ .

### 5.3 Expression de l'existence d'une solution par une 2-formule

On sait que toutes les solutions  $E$  contenant  $\{U_1, U_2\}$  vérifient  $\alpha \subset E \subset \beta$ . Si  $\alpha = \beta$  alors  $\alpha$  est bien une solution dans  $\mathcal{E}(\alpha, \beta)$  car l'opération  $\oplus'$  implique la Q-convexité de  $\alpha$ , les opérations  $\odot, \odot'$  que  $X_p \alpha(i) \leq p_i$  et l'opération  $\otimes$  que  $X_p \alpha(i) \geq p_i$ . Pour terminer l'algorithme il suffit de retourner  $\alpha$ .



Si  $\alpha \subsetneq \beta$  on ne peut pas savoir directement si il y a une solution. On va exprimer l'existence d'une solution par une 2-formule. Comme la satisfaction d'une 2-formule (problème 2-SAT) peut se faire en temps linéaire ([APT79]), on aura un algorithme polynomial pour résoudre RECONSTRUCTION.

A chaque point de  $M \in \beta \setminus \alpha$  on associe la variable  $V_M$  qui signifie “ $M \in E$ ” où  $E \in \mathcal{E}(\alpha, \beta)$ . À chaque assignation des variables  $V_M$  il correspond un ensemble  $E(V)$ . Il suffit d'exprimer que  $E(V)$  a les bonnes projections et que  $E(V)$  est  $Q$ -convexe selon  $p$  et  $q$ .

### 5.3.1 Formules exprimant $X_q E(j) = q_j$

On se fixe une droite  $q = j$ . On sait que cette ligne est de type  $t_i$  avec  $i \in \{0, \dots, 3\}$ . Si elle est de type  $t_0$  elle ne contient aucun point indéterminé sinon on va construire une formule  $FQ_j$  exprimant  $X_q E(j) = q_j$ .

- Si  $q = j$  est de type  $t1$  ou  $t2$  alors :

$$FQ_j = \bigwedge_{\substack{\langle i, j \rangle, \langle i', j' \rangle \in \beta \setminus \alpha \\ i' - i = \delta q_j}} V_{\langle i, j \rangle} \iff \neg V_{\langle i', j' \rangle}$$

- Si  $q = j$  est de type  $t3$ :

$$FQ_j = \bigwedge_{\substack{\langle i, j \rangle, \langle i', j' \rangle \in \beta \setminus \alpha \\ i' - i > \delta q_j}} V_{\langle i, j \rangle} \iff \neg V_{\langle i', j' \rangle}$$

Si  $E$  est  $Q$ -convexe et vérifie  $X_q E(j) = q_j$  alors les  $q_j$  points de  $E$  sur la ligne  $q = j$  sont toujours consécutifs. On en déduit :

**Lemme 5.3.1** *Soit  $V$  une assignation des variables booléennes telles que  $E(V)$  est  $Q$ -convexe. L'ensemble  $E(V)$  vérifie  $X_q(E(V))(j) = q_j$  si et seulement si  $V$  vérifie la formule  $FQ_j$ .*

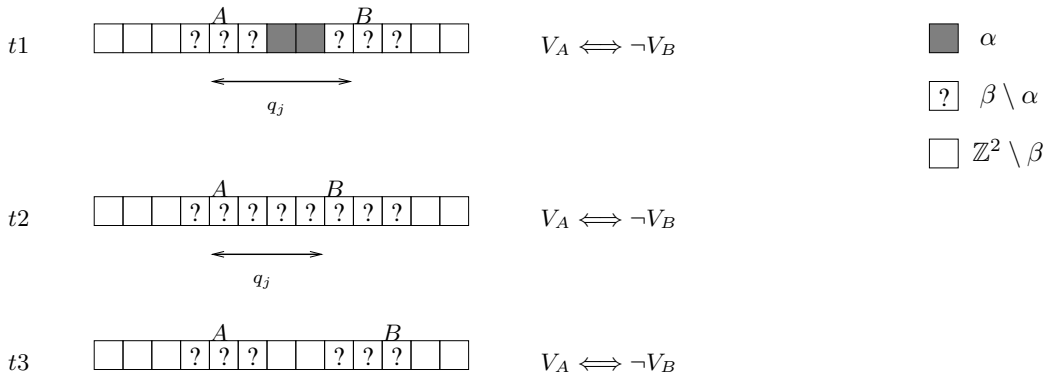


FIG. 5.7 – Les formules  $FQ_j$

De même on peut définir des formules  $FP_i$  exprimant  $X_p E(V)(i) = p_i$

### 5.3.2 Formules exprimant la Q-convexité

On va maintenant exprimer la Q-convexité de  $E(V)$ . Il faut imposer qu'autour de chaque point  $M \notin E(V)$  il y a un quadrant ne contenant aucun point de  $E(V)$  (voir figure 5.8):

- Cas  $M \in \beta \setminus \alpha$ . Les droites  $p = p(M)$  et  $q = q(M)$  sont de type  $t1$ ,  $t2$  ou  $t3$ . Considérons les 4 demi-droites  $\Delta_i = R_i(M) \cap R_{i+1}(M)$ .
  - Si  $\alpha_i \neq \emptyset$  alors  $\Delta_0 \cap \alpha_i \neq \emptyset$  ou  $\Delta_2 \cap \alpha_i \neq \emptyset$ .
  - Supposons donc  $\alpha_i = \emptyset$ . Soit  $k \in \{0,2\}$  tel que  $|\Delta_k \cap \beta_i| = \max(|\Delta_0 \cap \beta_i|, |\Delta_2 \cap \beta_i|)$ . On a alors  $|\beta_i \setminus \Delta_k| < \frac{|\beta_i|}{2} = p_i$  et donc  $\Delta_k$  contient forcément un point de  $E$  pour tout  $E \in \mathcal{E}(\alpha, \beta)$ .

Dans tous les cas on peut calculer un  $k \in \{0,2\}$  tel que  $\Delta_k(M) \cap E \neq \emptyset$  pour tout  $E \in \mathcal{E}(\alpha, \beta)$ . De même on peut trouver un  $k' \in \{1,3\}$  tel que  $\Delta_{k'}(M) \cap E \neq \emptyset$  pour tout  $E \in \mathcal{E}(\alpha, \beta)$ . On en déduit qu'il existe  $l$  tel que pour tout  $k \neq l$  on a  $R_k(M) \cap E \neq \emptyset$  pour tout  $E \in \mathcal{E}(\alpha, \beta)$ . On peut alors modéliser la Q-convexité de  $E$  par la formule :

$$V_N \rightarrow V_M \quad (5.3)$$

pour tout  $N \in (\beta \setminus \alpha) \cap R_l(M)$ .

- Cas  $M \notin \beta$  et les droites  $p = p(M)$  et  $q = q(M)$  sont de type  $t1, t2$  ou  $t3$  avec dans le dernier cas tous les points de  $\beta$  sur la droite du même coté par rapport à  $M$ . Dans ce cas, comme précédemment on peut trouver  $l$  tel que pour tout  $k$  différent de  $l$   $R_k(M) \cap E$  est non vide pour tout  $E \in \mathcal{E}(\alpha, \beta)$ . On exprime alors la Q-convexité par :

$$\neg V_N \quad (5.4)$$

pour tout  $N \in (\beta \setminus \alpha) \cap R_l(M)$ .

- Cas  $M \notin \beta$  avec une des deux droites  $p = p(M)$  ou  $q = q(M)$  de type  $t0$  ou  $t3$  avec  $M$  entre les deux séquences de points inconnus. Comme on a fixé les deux pieds  $U_1$  et  $U_2$  on sait qu'il existe au plus deux quadrants  $R_{l_1}(M)$  et  $R_{l_2}(N)$  qui ne contiennent aucun point de  $\alpha$ . On modélise alors la Q-convexité par la formule

$$\neg V_{N_1} \vee \neg V_{N_2} \quad (5.5)$$

pour tout point  $N_1 \in (\beta \setminus \alpha) \cap R_{l_1}(M), N_2 \in (\beta \setminus \alpha) \cap R_{l_2}(M)$ .

Notons alors  $F$  la conjonction des formules  $FP_i, FQ_j, (5.3), (5.4), (5.5)$ .

**Lemme 5.3.2** *L'ensemble  $E(V)$  est Q-convexe selon  $p$  et  $q$  et vérifie  $\forall i, j X_p(i) = p_i, X_q(j) = q_j$  si et seulement si  $V$  vérifie la formule  $F$ . Donc l'ensemble des solutions  $\mathcal{E}(\alpha, \beta)$  est non vide si et seulement si la formule  $F$  est satisfaisable.*

### 5.3.3 Complexité de l'algorithme

Comme  $F$  est une 2-formule on peut utiliser un algorithme linéaire pour résoudre 2-SAT avec la formule  $F$  ([APT79]). Si  $F$  est satisfaisable, l'algorithme pour résoudre 2-SAT

---

**Algorithme 1** Résout RECONSTRUCTION( $\mathcal{Q}(p,q),\{p,q\}$ ).

---

$\alpha \leftarrow \emptyset, \beta \leftarrow \Delta$

**répète**

    effectuer opérations de complétion

**jusqu'à ce que** Stabilité ou  $\alpha \not\subset \beta$

**si**  $\alpha \not\subset \beta$  **alors**

    retourner "pas de solutions"

**fin si**

$\alpha_d \leftarrow \alpha, \beta_d \leftarrow \beta$

**pour tout**  $U_1, U_2 \in \beta$  tel que  $p(U_1) = p_{min}, p(U_2) = p_{max}$  **faire**

$\alpha \leftarrow \alpha_d \cup \{U_1, U_2\}, \beta \leftarrow \beta_d.$

**répète**

    effectuer opérations de complétion

**jusqu'à ce que** Stabilité ou  $\alpha \not\subset \beta$

**si**  $\alpha \not\subset \beta$  **alors**

    retourner à la boucle **pour** pour choisir un autre  $(U_1, U_2)$

**fin si**

    calculer les formules booléennes  $FQ_j, FP_i$ , (5.3), (5.4) et (5.5)

    chercher instantiation  $V$  des variables vérifiant ces formules

**si** satisfaisable **alors**

    retourner  $E(V)$

**fin si**

**fin pour**

retourner "pas de solutions"

---



On en déduit :

**Théorème 5.3.3** *Il existe un algorithme nécessitant  $O(lq^2(lplq)^2(lp + lq))$  opérations et résolvant  $\text{RECONSTRUCTION}(\mathcal{Q}(p,q),\{p,q\})$ .*

## 5.4 Extension à plus de deux directions

On désigne par  $\mathcal{Q}(\mathcal{D})$  la classe des Q-convexes selon  $\mathcal{D}$ . (voir définition 2.5.7). On peut étendre facilement l'algorithme précédent pour résoudre  $\text{RECONSTRUCTION}(\mathcal{Q}(\mathcal{D}),\mathcal{D})$ . On se fixe une direction  $p \in \mathcal{D}$ . On se fixe toujours deux pieds  $U_1, U_2 \in \alpha$  tel que  $p(U_1) = pmin, p(U_2) = pmax$ . On peut faire les opérations de complétion en examinant tous les couples  $(p,q) \in \mathcal{D}^2$ .

On peut trouver les formules  $FP$  associées à chacune des directions de  $\mathcal{D}$  ainsi que les formules (5.3) et (5.4).

La seule difficulté est dans la formule (5.5), en effet pour trouver cette formule on utilise le fait que  $U_1$  et  $U_2$  sont dans deux quadrants différents, or ce n'est plus le cas lorsque l'on considère un couple de directions  $(q,r)$  avec  $p \notin \{q,r\}$ .

Supposons donc que  $U_1$  et  $U_2$  sont dans le quadrant  $R_0(M)$ . On considère les droites  $p = i$  avec  $i \leq q(M)$  ou  $q = j$  avec  $j \geq p(M)$ . Si l'une de ces droites est de type  $t1$  alors on peut trouver un quadrant  $R_k(M)$ ,  $k \neq 0$  qui contient un point de  $E$  pour tout  $E \in \mathcal{E}(\alpha,\beta)$ .

Si l'une des droites  $p = i$  avec  $i \geq p(M)$  est de type  $t2$  ou  $t3$  et une des deux demi-droites  $p = i, q \geq q(M)$  ou  $p = i, q \leq q(M)$  contient plus de  $p_i$  points de  $\beta$ , alors cette demi-droite contient forcément un point de  $E$  pour tout  $E \in \mathcal{E}(\alpha,\beta)$ , on peut donc aussi trouver un quadrant  $R_k(M)$ ,  $k \neq 0$  qui contient un point de  $E$  pour tout  $E \in \mathcal{E}(\alpha,\beta)$ .

On peut raisonner de la même façon si l'une des droites  $q = j$  avec  $j \geq q(M)$  est de type  $t2$  ou  $t3$  et une des deux demi-droites  $q = j, p \geq p(M)$  ou  $q = j, p \leq p(M)$  contient plus de  $q_j$  points de  $\beta$ .

Donc dans ces cas là comme on connaît deux quadrants on peut exprimer la Q-convexité en prenant les mêmes formules (5.5).

Supposons donc que toutes les droites  $p = i$  avec  $i \geq p(M)$  ou  $q = j$  avec  $j \geq q(M)$  sont de type  $t0, t2$  ou  $t3$ , toutes les demi-droites  $p = i, q \geq q(M)$  ou  $p = i, q \leq q(M)$  contiennent exactement  $p_i$  points de  $\beta$ , et que toutes les demi-droites  $q = j, p \geq p(M)$  ou  $q = j, p \leq p(M)$  contiennent exactement  $q_j$  points de  $\beta$ .

D'après les formules  $FP$  ou  $FQ$  on sait que si  $M$  est dans  $(\beta \setminus \alpha) \cap R_2(M)$  alors il existe des points  $P_1 \in R_1(M), P_2 \in R_3(M)$  tels que  $V_M \Leftrightarrow \neg V_{P_1} \Leftrightarrow \neg V_{P_2}$  est dans les formules  $FP$  et  $FQ$ .

Comme il y a un quadrant qui ne contient aucun point, un des quadrants a tous ses littéraux à zéro. On en déduit que dans chacun des trois quadrants tous les littéraux sont équivalents. Pour exprimer la Q-convexité il suffit donc de rajouter la formule :

$$V_{N_1} \Leftrightarrow V_{N_2} \quad (5.6)$$

pour tous  $N_1, N_2 \in R_2(M)$ .

**Théorème 5.4.1** *Si  $n = \max_{p \in \mathcal{D}} lp$  alors  $\text{RECONSTRUCTION}(\mathcal{Q}(\mathcal{D}),\mathcal{D})$  peut être résolu en  $O(n^7)$  opérations.*

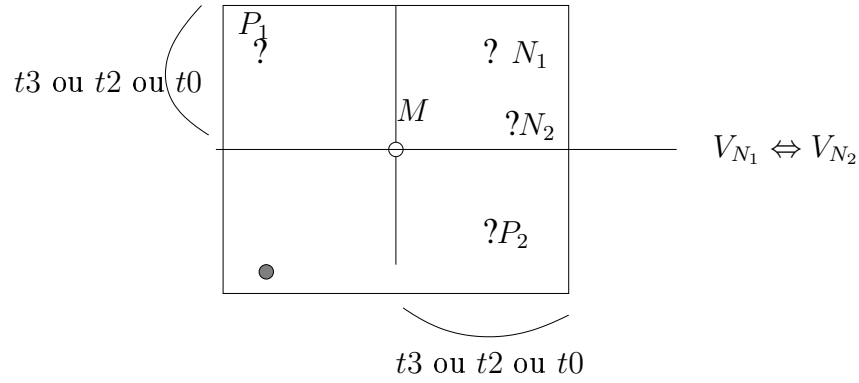


FIG. 5.9 – La formule supplémentaire dans le cas de plus de deux directions

En fait on trouve un algorithme polynomial même si on met les directions dans la donnée. Plus précisément le problème algorithmique

RECONSTRUCTIONQCONV.

Donnée : Un ensemble fini  $\mathcal{D}$  de directions,  $|\mathcal{D}|$  suites  $((p_i)_{i \in \mathbb{Z}}, p \in \mathcal{D})$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et à support fini.

Sortie : Un ensemble  $E \in \mathcal{Q}(\mathcal{D})$ , si il existe, dont les projections vérifient  $\forall p \in \mathcal{D} \forall i \in \mathbb{Z} X_p(i) = p_i$

peut être résolu en  $O(n^7 d^2)$  opérations où  $n = \max_{p \in \mathcal{D}} lp$  et  $d = |\mathcal{D}|$ .

## 5.5 Connexité

Le théorème 2.5.3 montre que l'algorithme précédent permet de reconstruire les Q-convexes 8-connexes dès que  $\mathcal{D}$  contient  $\{x, y\}$ . En effet il suffit alors de vérifier préalablement que les projections selon ces directions sont constituées d'entiers non nuls. Si c'est le cas toute solution Q-convexe est aussi 8-connexe. Sinon il n'y a aucune solution 8-connexe.

**Corollaire 5.5.1** Si  $\mathcal{D}$  contient  $\{x, y\}$  et si  $\mathcal{F}$  est la classe des Q-convexes 8-connexes alors RECONSTRUCTION( $\mathcal{F}, \mathcal{D}$ ) peut être résolu en  $O(n^7)$  opérations.

Avec  $\mathcal{D} = \{x, y\}$ , ce n'est pas la meilleure complexité connue : en effet dans ce cas là d'après le théorème 2.5.3 les Q-convexes 8-connexes sont exactement les 8-connexes HV-convexes, or dans [BDLDR<sup>+</sup>99] les auteurs donnent un algorithme en  $O(n^5)$ .

Pour la 4-connexité c'est un peu plus compliqué. Supposons toujours que  $\mathcal{D}$  contient  $\{x, y\}$ . Le lemme 5.2.1 montre que  $\alpha$  est insécable selon la direction  $p = x$ . Dans la suite on va avoir besoin de l'insécabilité de  $\alpha$  selon l'autre direction  $q = y$ . Pour cela il suffit de fixer les deux pieds selon la direction  $q$  et d'effectuer les opérations de complétion. A priori cela va faire monter la complexité algorithmique d'un facteur  $lq^2$ . Mais on sait qu'avant de fixer ces pieds les droites  $q = qmin$  et  $q = qmax$  sont de type  $ti$ , on peut donc seulement consulter deux choix de pieds pour chacun des deux choix. Les deux pieds que l'on a fixé multiplient donc la complexité théorique par 4 qui est constant.

Après avoir effectué ces opérations  $\alpha$  est  $Q$ -convexe selon  $\{x, y\}$  et insécable, il est donc 8-connexe. Considérons donc ses composantes 4-connexes  $\alpha = A_1 \cup \dots \cup A_n$ . Soit  $x_i = \max_{M \in A_i} x_M$  et  $y_i = \max_{M \in A_i} y_M$ . Quitte à réordonner les  $A_i$  on peut supposer que  $(x_i)$  est croissante. Comme  $\alpha$  est  $Q$ -convexe on en déduit que  $y_i$  est croissante ou décroissante. Supposons par exemple que  $y_i$  est croissante. Comme  $A_i$  est 8-connexe on a :

$$x_i = \max_{M \in A_i} x_M = \left( \min_{M \in A_{i+1}} x_M \right) + 1 \quad y_i = \max_{M \in A_i} y_M = \left( \min_{M \in A_{i+1}} y_M \right) + 1$$

On peut alors exprimer la 4-connexité des solutions par les formules :

$$V_{x_i, y_i} \vee V_{x_i+1, y_i+1}.$$

(voir figure 5.10)

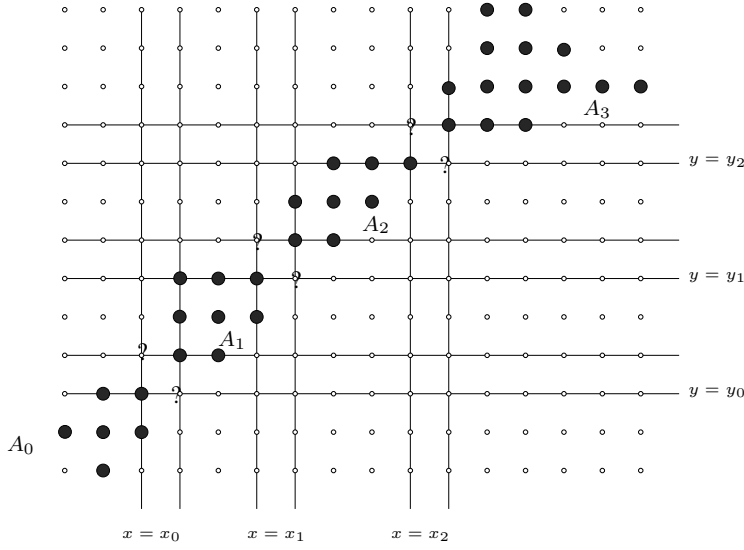


FIG. 5.10 – Expression de la 4-connexité par la 2-formule  $(V_{x_0, y_0} \vee V_{x_0+1, y_0+1}) \wedge (V_{x_1, y_1} \vee V_{x_1+1, y_1+1}) \wedge (V_{x_2, y_2} \vee V_{x_2+1, y_2+1})$ . Seuls les points de  $\beta \setminus \alpha$  intervenant dans la 4-connexité sont représentés.

On obtient donc :

**Corollaire 5.5.2** Si  $\mathcal{D}$  contient  $\{x, y\}$  et si  $\mathcal{F}$  est la classe des  $Q$ -convexes 4-connexes alors  $\text{RECONSTRUCTION}(\mathcal{F}, \mathcal{D})$  peut être résolu en  $O(n^7)$  opérations.

**Remarque 5.5.3** L'autre solution faite dans [DLN99] pour les HV-convexes 4-connexes consiste à mettre des inégalités larges dans les conditions de l'opération  $\oplus'$ . En effet d'après le lemme 4.2.1 lorsque  $S_k(M) + S_{k+1}(M) \geq A$  et  $R_k(M) \cap E = \emptyset$  alors  $E \subset R_{k-1}(M) \cup R_{k+1}(M)$  ce qui est impossible lorsque  $E$  est 4-connexe. Avec cette opération le noyau  $\alpha$  est directement 4-connexe, toutes les solutions  $E \in \mathcal{E}(\alpha, \beta)$  seront 4-connexes.

## 5.6 Reconstruction avec localisation a priori

Dans le problème de la reconstruction a priori on impose aux solutions de vérifier  $\alpha_0 \subset E \subset \beta_0$ . Précisément :

RECONSLOC( $\mathcal{F}, \mathcal{D}$ ).

Donnée :  $|\mathcal{D}|$  suites  $((r_i^p)_{i \in \mathbb{Z}}, p \in \mathcal{D})$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et à support fini, deux parties finies  $\alpha_0, \beta_0$  de  $\mathbb{Z}^2$

Sortie : Une ensemble  $E \in \mathcal{F}$ , si il existe, dont les projections vérifient  $\forall p \in \mathcal{D} \forall i \in \mathbb{Z} X_p(i) = r_i^p$  et tel que  $\alpha_0 \subset E \subset \beta_0$

L'algorithme présenté précédemment résout aussi ce problème. Il suffit de prendre au départ  $\alpha = \alpha_0$  et  $\beta = \Delta \cap \beta_0$ .

**Proposition 5.6.1** *Le problème RECONSLOC( $\mathcal{Q}(\mathcal{D}), \mathcal{D}$ ) peut être résolu en  $O(n^7)$  opérations.*

## 5.7 Implémentation

L'algorithme 1 décrit dans ce chapitre a été implémenté sur machine. Une légère optimisation a été faite sur le choix des pieds : au lieu de fixer les deux pieds simultanément on effectue des opérations de complétion entre les deux choix de sorte que parfois un seul pied suffit pour pouvoir réduire le problème à 2-SAT.

Le tableau donné à l'annexe B.1 montre qu'en fait très souvent aucun pied n'est à fixer, et les opérations de complétion suffisent à retrouver la solution (qui est alors unique). Ceci donne donc une complexité moyenne expérimentale inférieure à  $O(n^3)$  et ceci indépendamment du nombre de directions.

Toutefois ces résultats expérimentaux doivent être considérés avec prudence car le générateur aléatoire utilisé pour fabriquer des Q-convexes est sans doute beaucoup trop rudimentaire.





# Chapitre 6

## Unicité dans le problème de la reconstruction

On a vu dans le chapitre précédent que l'on pouvait reconstruire une solution Q-convexe à partir de ses projections en un temps polynomial. Mais on a seulement construit une solution, il se peut qu'il y en ait beaucoup d'autres.

Si  $\mathcal{F}$  est une classe de parties de  $\mathbb{Z}^2$  et si  $\mathcal{D}$  est un ensemble fini de directions alors on dira que l'on a UNICITÉ( $\mathcal{F}, \mathcal{D}$ ) si pour tous  $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$  on a :

$$(\forall p \in \mathcal{D} \ X_p E_1 = X_p E_2) \implies E_1 = E_2$$

Si  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{Z}^2)$  (la classe de toutes les parties de  $\mathbb{Z}^2$ ) et si  $\mathcal{D}$  est fini alors on n'a jamais UNICITÉ( $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2), \mathcal{D}$ ) (voir [BDLNP]). Si  $\mathcal{C}$  désigne la classe des totalement convexes alors R. Gardner et P. Grizmann ont montré, entre autre, que si  $|\mathcal{D}| \geq 7$  on a UNICITÉ( $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ ).

On va essayer de trouver un théorème analogue pour les Q-convexes. Comme c'est a priori un sujet difficile, la première étape sera de faire une étude expérimentale. En particulier on va donner une méthode permettant d'énumérer tous les contre-exemples à l'unicité de taille suffisamment petite.

### 6.1 Les « switching-components »

#### 6.1.1 Définitions et première propriétés

Lorsque l'on a deux ensembles  $F^+$  et  $F^-$  ayant les mêmes projections selon  $\mathcal{D}$ , les points intéressants sont ceux qui ne sont pas dans l'intersection de  $F^+$  et  $F^-$ . On étudie donc seulement les ensembles  $E^- = F^- \setminus F^+$  et  $E^+ = F^+ \setminus F^-$  d'où la définition suivante :

**Définition 6.1.1** *Le couple d'ensembles  $(E^+, E^-)$  est un « switching-component » pour la classe  $\mathcal{F}$  et l'ensembles de directions  $\mathcal{D}$  si on a les deux conditions suivantes :*

- *Les ensembles  $E^-$  et  $E^+$  sont disjoints et ont même projections selon  $\mathcal{D}$ .*
- *Il existe  $E_0$  disjoint avec  $E^- \cup E^+$  tels que  $E^+ \cup E_0$  et  $E^- \cup E_0$  sont dans  $\mathcal{F}$ .*

Donc UNICITÉ( $\mathcal{F}, \mathcal{D}$ ) est équivalent à l'inexistence de « switching-components » pour  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{D}$ .

On suppose désormais que  $\mathcal{F}$  est stable par intersection. On peut alors prendre dans la définition 6.1.1 l'ensemble  $E_0$  suivant :

$$E_0 = \bigcap \{E \subset \mathbb{Z}^2 : E \cup E^+ \in \mathcal{F} \text{ et } E \cup E^- \in \mathcal{F}\}$$

En effet comme  $\mathcal{F}$  est stable par intersection on a  $E^+ \cup E_0 \in \mathcal{F}$  et  $E^- \cup E_0 \in \mathcal{F}$  et si  $E_0$  n'est pas disjoint avec  $E^- \cup E^+$  alors aucun ensemble  $E$  tel que  $E^+ \cup E \in \mathcal{F}$  et  $E^- \cup E \in \mathcal{F}$  n'est disjoint avec  $E^- \cup E^+$ .

En fait si  $\text{ENVP}(E) = \bigcap \{F \in \mathcal{F} : F \supset E\}$  alors  $E_0$  peut se calculer de la manière suivante :  $E_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n$  où

$$\begin{aligned} F_0 &= \emptyset, \\ F_{i+1} &= (\text{ENVP}(F_i \cup E^+) \setminus E^+) \cup \text{ENVP}(F_i \cup E^-) \setminus E^- \end{aligned}$$

Donc on peut tester si un couple  $(E^-, E^+)$  est un « switching-component » grâce à l'algorithme 2 :

---

**Algorithme 2** Vérifie si  $(E^+, E^-)$  est un « switching-component », et calcule  $E_0$

---

```

pour tout  $p \in \mathcal{D}$  faire
  si  $X_p E^+ \neq X_p E^-$  alors
    retourne FAUX
  fin si
fin pour
si  $E^+ \cap E^- \neq \emptyset$  alors
  retourne FAUX
fin si
 $F \leftarrow \emptyset$ 
répète
   $F \leftarrow (\text{ENVP}(F \cup E^+) \setminus E^+) \cup \text{ENVP}(F \cup E^-) \setminus E^-$ 
  si  $F \cap (E^- \cup E^+) \neq \emptyset$  alors
    retourne FAUX
  fin si
jusqu'à ce que  $F$  n'est plus modifié.
 $E_0 \leftarrow F$ 
retourne VRAI

```

---

### 6.1.2 Énumération de switching-components

Maintenant on va s'inspirer de cet algorithme pour calculer tous les switching-components inclus dans un ensemble arbitraire comme un rectangle  $\Delta$  de taille  $l \times h$ . On utilise, un peu

comme dans le chapitre précédent, un algorithme glouton, on cherche donc les switching-components  $(E^+, E^-)$  tels que

$$\alpha_+ \subset E^+ \subset \beta_+, \quad \alpha_- \subset E^- \subset \beta_-.$$

On peut alors augmenter  $\alpha_+, \alpha_-$  et diminuer  $\beta_+, \beta_-$  grâce à l'algorithme 3.

On peut alors faire une procédure récursive (algorithme 4) pour afficher tous les « switching-components » inclus dans le rectangle  $\Delta$ .

En annexe A sont présentées différentes listes de « switching-components » obtenues grâce à cet algorithme.

Un exemple important est le cas  $\mathcal{F} = \mathcal{Q}(x, y)$ ,  $\mathcal{D} = \{x, y, 2x + y, -x + 2y\}$ . Dans ce cas on trouve aucun « switching-component » inclus dans un carré  $13 \times 13$ . (Le calcul prend 9h sur un Celeron 433.) Ceci invite à énoncer la conjecture suivante :

**Conjecture 6.1.2** *On a  $\text{UNICITÉ}(\mathcal{Q}(x, y), \{x, y, 2x + y, -x + 2y\})$ .*

Malheureusement on ne réussira pas à démontrer ce résultat. Par contre dans la prochaine section on va montrer un théorème dont l'une des conséquences sera la preuve de  $\text{UNICITÉ}(\mathcal{Q}(x, y, 2x + y, -x + 2y), \{x, y, 2x + y, -x + 2y\})$ .

## 6.2 Le théorème d'unicité

### 6.2.1 Cas des totalement convexes

**Définition 6.2.1** *La droite projective réelle est l'ensemble  $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . L'ensemble des directions de  $\mathbb{R}^2$  est en bijection avec  $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$  grâce à l'application  $\text{pente} : ax + by \mapsto -\frac{b}{a}$ . On confondra donc souvent une direction  $d$  avec sa  $\text{pente}(d)$ . Une transformation projective est une fonction de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$  dans lui-même de la forme  $y \mapsto \frac{a+by}{c+dy}$ . C'est la trace sur les directions de l'application linéaire de la forme  $(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$ .*

**Définition 6.2.2** *Le birapport de quatre nombres de la droite projective réelle  $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  est défini par :*

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)}$$

avec les conventions évidentes lorsque  $\infty$  est en jeu. Le birapport de quatre directions est le birapport de leurs pentes respectives.

Le birapport de 4 directions distinctes consécutives est toujours supérieur à 1. En effet comme  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$ , on peut supposer que les pentes  $x_1, x_2, x_3, x_4$  des 4 directions vérifient  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ . On a alors  $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \frac{f(x_3)}{f(x_4)}$  où  $f(x) = \frac{x-x_1}{x-x_2}$ . Or si  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$   $f$  est décroissante sur  $]x_2, \infty]$  et donc  $f(x_3) < f(x_4)$ .

Par exemple si on prend les quatre directions  $x, y, 2x + y, -x + 2y$  les pentes sont respectivement  $\infty, 0, -2, \frac{1}{2}$ , on voit que le birapport des quatre directions réordonnées est :

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \infty \end{bmatrix} = \frac{(\frac{1}{2} - (-2))(\infty - 0)}{(\frac{1}{2} - 0)(\infty - (-2))} = \frac{\frac{1}{2} - (-2)}{\frac{1}{2} - 0} = 5$$

---

**Algorithme 3** COMPLÉTION( $\alpha_+, \alpha_-, \beta_+, \beta_-$ ) avec  $\beta_- \cap \alpha_+ = \emptyset, \beta_+ \cap \alpha_- = \emptyset, \alpha_+ \subset \beta_+, \alpha_- \subset \beta_-$

---

**pour tout**  $p \in \mathcal{D}$  et  $i \in \{\min_{M \in \Delta} p(M) \dots \max_{M \in \Delta} p(M)\}$  **faire**

  {D'abord la première condition de switching}

**si**  $X_p \beta_+(i) < X_p \alpha_-(i)$  ou  $X_p \beta_-(i) < X_p \alpha_+(i)$  **alors**

    retourne “aucun switching”

**fin si**

**si**  $X_p \beta_+(i) = X_p \alpha_-(i)$  **alors**

$\alpha_+ \leftarrow \alpha_+ \cup \{M \in \beta_+ : p(M) = i\}$

$\beta_- \leftarrow \beta_- \setminus \{M \notin \alpha_- : p(M) = i\}$  {On a toujours  $\alpha_+ \cap \beta_- = \emptyset$  car  $\beta_+ \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \alpha_-$ }

**fin si**

**si**  $X_p \beta_-(i) = X_p \alpha_+(i)$  **alors**

$\alpha_- \leftarrow \alpha_- \cup \{M \in \beta_- : p(M) = i\}$

$\beta_+ \leftarrow \beta_+ \setminus \{M \notin \alpha_+ : p(M) = i\}$

**fin si**

**si**  $X_p((\beta_+ \cup \beta_-) \setminus (\alpha_+ \cup \alpha_-))(i) = 1$  et  $X_p \alpha_+(i) = X_p \alpha_-(i)$  **alors**

$M \leftarrow$  le seul point  $M \in (\beta_+ \cup \beta_-) \setminus (\alpha_+ \cup \alpha_-)$  tel que  $p(M) = i$

$\beta_+ \leftarrow \beta_+ \setminus \{M\}$

$\beta_- \leftarrow \beta_- \setminus \{M\}$

**fin si**

**fin pour**

{Deuxième condition de switching}

$F \leftarrow \emptyset$

**répète**

$F \leftarrow (\text{ENVP}(F \cup \alpha_+) \setminus \beta_+) \cup \text{ENVP}(F \cup \alpha_-) \setminus \beta_-)$

**si**  $F \cap (\alpha_- \cup \alpha_+) \neq \emptyset$  **alors**

    retourne “aucun switching”

**fin si**

**jusqu'à ce que**  $F$  n'est plus modifié.

$\beta_- \leftarrow \beta_- \setminus (F \cup \text{ENVP}(\alpha_+))$

$\beta_+ \leftarrow \beta_+ \setminus (F \cup \text{ENVP}(\alpha_-))$

---

**Algorithme 4** ÉNUMÈRE( $\alpha_+, \alpha_-, \beta_+, \beta_-$ )**répète**COMPLÉTION( $\alpha_+, \alpha_-, \beta_+, \beta_-$ )**jusqu'à ce que**  $\alpha_+, \alpha_-, \beta_+, \beta_-$  sont invariants**si**  $\alpha_+ = \beta_+$  et  $\alpha_- = \beta_-$  **alors**affiche ( $\alpha_+, \alpha_-$ )**sinon**choisir  $M \in (\beta_+ \cup \beta_-) \setminus (\alpha_+ \cup \alpha_-)$ **si**  $M \in \beta_+$  **alors**ÉNUMÈRE( $\alpha_+ \cup \{M\}, \alpha_-, \beta_+, \beta_- \setminus \{M\}$ )**fin si****si**  $M \in \beta_-$  **alors**ÉNUMÈRE( $\alpha_+, \alpha_- \cup \{M\}, \beta_+ \setminus \{M\}, \beta_-$ )**fin si**ÉNUMÈRE( $\alpha_+, \alpha_-, \beta_+ \setminus \{M\}, \beta_- \setminus \{M\}$ )**fin si**

Pour plus de détails sur le birapport on pourra regarder [Ber90, 6.1].

**Définition 6.2.3** – L'ensemble  $E = \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subset \mathbb{R}^2$  est un polygone convexe si  $\forall A \in E$  on a  $A \notin \text{conv}(E \setminus \{A\})$ .

- Le polygone  $E \subset \mathbb{R}^2$  est un  $\mathcal{D}$ -polygone si toute droite  $d$  de direction dans  $\mathcal{D}$  vérifie  $|d \cap E| \in \{0, 2\}$ .
- Le polygone  $E \subset \mathbb{R}^2$  est dit affinement régulier si il existe une transformation affine bijective  $\phi$  et  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\phi(E) = \{(\cos \frac{2k\pi}{n}, \sin \frac{2k\pi}{n}) : k \in \{0, \dots, n-1\}\}$

**Théorème 6.2.4** Soit  $\mathcal{D}$  un ensemble de directions rationnelles : Les 7 propositions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un « switching-component » pour la classe des totalement convexes et l'ensemble de direction  $\mathcal{D}$ . (autrement dit on n'a pas UNICITÉ( $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ ).)
2. Il existe un  $\mathcal{D}$ -polygone convexe inclus dans  $\mathbb{Z}^2$ .
3. Il existe un  $\mathcal{D}$ -polygone convexe inclus dans  $\mathbb{Q}^2$ .
4. Il existe un  $\mathcal{D}$ -polygone convexe inclus dans  $\mathbb{R}^2$ .
5. Il existe un  $\mathcal{D}$ -polygone affinement régulier.
6. Les birapports de 4 directions consécutives de  $\mathcal{D}$  sont dans  $\{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\}$ .
7. Il existe une transformation linéaire rationnelle  $\phi$  de  $\mathbb{R}^2$  telle que les pentes de  $\phi(\mathcal{D})$  soient toutes dans  $\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, 1, \infty\}$ .

*Démonstration:*

- (1)  $\Leftrightarrow$  (2) c'est le théorème 5.5 de [GG97].
- (2)  $\Leftrightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (4) clair.

- (4)  $\Rightarrow$  (5) voir [GM80] ou [Gar95, p34-36]. (Le lemme 6.2.28 sera une généralisation de cette implication.)
- (5)  $\Rightarrow$  (6) c'est le théorème 4.5 de [GG97].
- (6)  $\Rightarrow$  (7) Soit  $d_1, d_2, d_3$  trois directions consécutives de  $\mathcal{D}$  que l'on confond avec leurs pentes. Il existe une transformation projective  $\phi_1$  de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$  telle que  $\phi_1(\lambda_1) = 0, \phi_1(\lambda_2) = 1, \phi_1(\lambda_3) = \infty$ . Comme  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Q}$  cette transformation est à coefficients rationnels. Comme  $d_1, d_2, d_3$  sont consécutives on en déduit que les pentes de  $\mathcal{D}' = \phi_1(\mathcal{D}) \setminus \{0, 1, \infty\}$  sont négatives. Soit  $x$  l'une de ces pentes. On a  $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & \infty \end{bmatrix} \in \{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\}$ . On en déduit que  $x \in \mathcal{D}_0 = \{-3, -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\}$ . Donc  $\{0, 1, \infty\} \subset \phi_1(\mathcal{D}) \subset \{-3, -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, 1, \infty\}$ . Comme on a :

- $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{9}{8}$  donc  $\{-3, -2\} \not\subset \phi_1(\mathcal{D})$ .
- $\begin{bmatrix} -3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{9}{4}$  donc  $\{-3, -\frac{1}{2}\} \not\subset \phi_1(\mathcal{D})$ .
- $\begin{bmatrix} -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{8}{3}$  donc  $\{-2, -\frac{1}{3}\} \not\subset \phi_1(\mathcal{D})$ .
- $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & \infty \end{bmatrix} = \frac{9}{8}$  donc  $\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\} \not\subset \phi_1(\mathcal{D})$ .
- $\begin{bmatrix} -3 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \infty \end{bmatrix} = \frac{9}{8}$  donc  $\{-3, -\frac{1}{3}\} \not\subset \phi_1(\mathcal{D})$ .

On en déduit donc que  $\phi_1(\mathcal{D})$  est inclus dans l'un des trois ensembles suivants :

- $F_1 = \{0, 1, \infty, -2, -1, -\frac{1}{2}\}$ .
- $F_2 = \{0, 1, \infty, -3, -1\}$ .
- $F_3 = \{0, 1, \infty, -1, -\frac{1}{3}\}$ .
- Si  $\phi_1(\mathcal{D}) \subset F_1$  on prend  $\phi$  la transformation linéaire associée à  $\phi_1$
- Si  $\phi_1(\mathcal{D}) \subset F_2$ , comme  $\phi_2(F_2) = \{0, 1, -2, -1, -\frac{1}{2}\} \subset F_1$  avec  $\phi_2(y) = \frac{2y}{3-y}$ , on peut prendre  $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$ .
- Si  $\phi_1(\mathcal{D}) \subset F_3$  on prend  $\phi = \phi_2 \circ \phi_3 \circ \phi_1$  où  $\phi_3(y) = \frac{1}{y}$ .
- (7)  $\Rightarrow$  (3) Il suffit de prendre l'image réciproque par  $\phi$  du polygone représenté à la figure 6.1 :

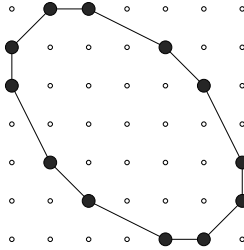


FIG. 6.1 – Un  $\mathcal{D}$ -polygone à sommets dans  $\mathbb{Z}^2$  avec  $\mathcal{D} = \{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, 1, \infty\}$ .

□

### 6.2.2 Extension aux Q-convexes

On peut définir la Q-convexité et la Q-convexité forte sur  $\mathbb{R}^2$  en reprenant telle quelle la définition sur  $\mathbb{Z}^2$ . Ceci amène aux définitions suivantes :

**Définition 6.2.5** *Un ensemble fini  $E \subset \mathbb{R}^2$  est un polygone Q-convexe fort selon  $\mathcal{D}$  si  $\forall A \in E$  on a  $A \notin QCONVFORT_{\mathcal{D}}(E \setminus \{A\})$ .*

**Théorème 6.2.6** *Soit  $\mathcal{D}$  un ensemble de directions rationnelles : Les 7 propositions du théorème 6.2.4 sont équivalentes aux deux propositions suivantes :*

8. *Il existe un « switching-component » de Q-convexes selon  $\mathcal{D}$  pour l'ensemble de directions  $\mathcal{D}$ . (ie on n'a pas UNICITÉ( $\mathcal{Q}(\mathcal{D}), \mathcal{D}$ )).*
9. *Il existe un  $\mathcal{D}$ -polygone Q-convexe fort selon  $\mathcal{D}$ .*

On va démontrer  $(1) \Rightarrow (8) \Rightarrow (9) \Rightarrow (5)$ . L'implication  $(1) \Rightarrow (8)$  est claire puisque qu'un totalement convexe est Q-convexe pour tous les ensembles de directions (proposition 2.6.1). La démonstration de  $(8) \Rightarrow (9) \Rightarrow (5)$  va occuper toute la fin de ce chapitre.

#### 6.2.2.1 Polygonalisation d'un « switching-component »

Dans toute cette partie on considère un « switching-component » de Q-convexes noté  $(E^+, E^-)$ .

On va construire un  $\mathcal{D}$ -polygone Q-convexe fort  $E$  c'est à dire un ensemble  $E$  qui vérifie :

$$\forall M \exists (i, p, q) \in \mathcal{A}_{\mathcal{D}} R_i^{pq}(M) \cap E = \{M\} \quad (6.1)$$

Dans les premiers exemples que l'on fait à la main l'ensemble  $E = E^- \cup E^+$  est directement un  $\mathcal{D}$ -polygone Q-convexe fort mais ce n'est pas toujours le cas (voir figure 6.2).

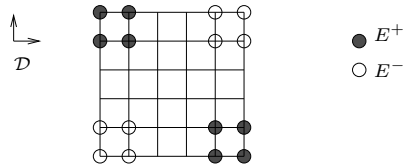


FIG. 6.2 – Un switching component de Q-convexes qui n'est pas un polygone Q-convexe.

**Notation** Si  $M \in E^+, p \in \mathcal{D}$  alors  $M_p$  est un point de  $E^-$  tel que  $p(M_p) = p(M)$ .

**Lemme 6.2.7** *Pour tout point  $M$  de  $E^+$  il existe un ASP  $\Pi$  autour de  $M$ , tel que  $\Pi \cap E^- = \emptyset$ . On le note  $ASP(M)$ .*

*Démonstration:* On se fixe  $M \in E^+$ . Soit  $i, p, q$  tel que  $R_i^{pq}(M)$  est maximum dans l'ensemble  $\{R_i^{pq}(M) | R_i^{pq}(M) \cap E^- = \emptyset\}$  pour l'inclusion.

On peut supposer par exemple que  $i = 0$ . Si  $R_0^{pq}(M)$  n'est pas un ASP alors il existe une directions  $r$  telle que la droite de direction  $r$  a une intersection avec  $R_0^{p,q}(N)$  égale



à  $\{M\}$ . Donc  $r = \alpha p + \beta q$  avec  $\alpha\beta > 0$ . Quitte à remplacer  $r$  par  $-r$  on peut supposer  $\alpha > 0, \beta > 0$ .

Supposons que  $p(M_r) < p(M)$ . On va montrer que  $R_0^{qr}(M)$  ne contient aucun point de  $E^-$  ce qui sera en contradiction avec la maximalité de  $R_i^{pq}(M)$ . On a  $R_0^{qr}(M) = R_0^{pq}(M) \cup R_1^{pr}(M)$ . Mais aucun point de  $E^-$  ne peut être dans  $R_1^{pr}(M)$  car si il y avait un tel point  $N$  alors on aurait  $M \in QCONV_{rp}(M_r, M_p, N)$ . (voir figure 6.3)

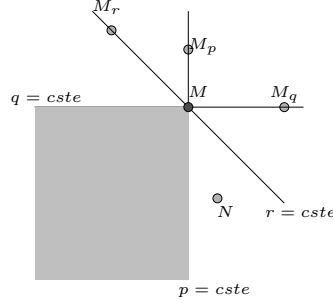


FIG. 6.3 – Pourquoi y-a-t-il un ASP autour de  $M$  disjoint avec  $E^-$ .

Si  $p(M_r) > p(M)$  alors on a  $q(M_r) < q(M)$ , en inversant  $p$  et  $q$  on est ramené au cas précédent.

Pour l'unicité il faut juste remarquer que si il y avait deux ASP  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  tels que  $\Pi_j \cap E^- = \emptyset, j = 1, 2$  alors il y aurait une direction  $p$  telle que la droite  $p = p(M)$  serait disjointe avec  $E^-$ .  $\square$

**Définition 6.2.8** Deux points  $A, B$  de  $E^+$  sont élémentairement équivalents ( $A \sim_e B$ ) si il existe  $i, p, q, N \in \mathbb{Q}^2$  tels que  $A, B \in R_i^{pq}(N)$  et  $R_i^{pq}(N) \cap E^- \subset \{N\}$

**Lemme 6.2.9**  $A \sim_e B$  si et seulement si il existe  $(i, p, q) \in \mathcal{A}_D$  (indices des ASP) tels que on ait les deux conditions suivantes

- $ASP(A) = R_i^{pq}(A)$  et  $ASP(B) = R_i^{pq}(B)$
- $ASP(A) \subset ASP(B)$  ou  $ASP(B) \subset ASP(A)$  où le point  $N \in \{\langle p(A), q(B) \rangle_{pq}, \langle p(B), q(A) \rangle_{pq}\}$  tel que  $A, B \in R_i^{pq}(N)$ , vérifie  $R_i^{pq}(N) \cap E^- \subset \{N\}$ .

*Démonstration:* Soit  $R_i^{pq}(N)$  le quadrant qui vérifie la définition 6.2.8 et qui soit maximum pour l'ordre suivant :

$$R_i^{pq}(N) \prec R_j^{p'q'}(N') \text{ ssi } R_i^{pq}(O) \subset R_j^{p'q'}(O) \quad (6.2)$$

où  $O = (0, 0)$ , (cet ordre ne dépend ni de  $N$  ni de  $N'$ .)

On peut supposer  $i = 0$ .

Supposons que  $R_0^{pq}(N)$  n'est pas un ASP, dans ce cas il existe une direction  $r$  telle que  $r = \alpha p + \beta q$  avec  $\alpha\beta > 0$ . On peut supposer comme dans le lemme précédent  $\alpha > 0, \beta > 0$ .

- Si  $R_0^{pq}(B) \subset R_0^{pq}(A)$  alors on a  $R_0^{pr}(B) \subset R_0^{pr}(A)$  et  $R_0^{qr}(B) \subset R_0^{qr}(A)$  mais  $ASP(A)$  contient  $R_0^{pr}(A)$  ou  $R_0^{qr}(A)$  (voir la preuve du dernier lemme). Donc  $R_0^{pr}(A)$  ou  $R_0^{qr}(A)$  vérifient les conditions de la définition 6.2.8 et donc on a  $R_0^{pr}(A) \not\supseteq R_0^{pq}(N)$  dans le premier cas et  $R_0^{qr}(A) \not\supseteq R_0^{pq}(N)$  dans le second, contradiction avec la maximalité de  $R_0^{pq}(N)$ .

- Si  $R_0^{pq}(A) \subset R_0^{pq}(B)$  on peut se ramener au cas précédent en échangeant  $A$  et  $B$ .
- Supposons que l'on ne soit pas dans les deux derniers cas. On peut supposer que  $p(N) = p(A), q(N) = q(B)$  ou  $p(N) = p(B), q(N) = q(A)$ . Plaçons-nous dans le cas  $p(N) = p(A)$  et  $q(N) = q(B)$ :

On a alors  $(p(A_r) < p(A) \text{ et } p(B_r) < p(B))$  ou  $(p(A_r) > p(A) \text{ et } p(B_r) > p(B))$  car sinon :

- Si  $r(B) \leq r(A)$  alors  $A \in QCONV_{pr}(A_r, A_p, B_r)$  (voir figure 6.4), *impossible*.

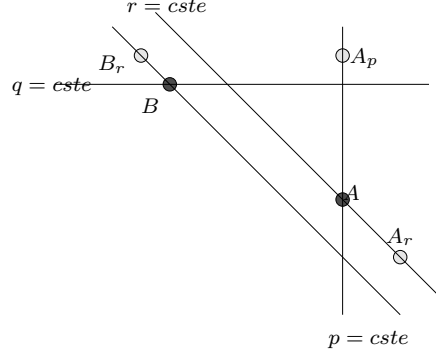


FIG. 6.4 – Cas  $r(B) \leq r(A)$

- Si  $r(B) \geq r(A)$  alors  $B \in QCONV_qr(B_r, B_q, A_r)$  ce qui est aussi *impossible*.

On en déduit que  $(R_0^{pr}(A) \cup R_0^{pr}(B)) \cap E^- = \emptyset$  ou  $(R_0^{qr}(A) \cup R_0^{qr}(B)) \cap E^- = \emptyset$ . Supposons que l'on ait dans le premier cas. Soit  $N' = \langle \max(p(A), p(B)), \max(r(A), r(B)) \rangle_{p,r}$ . On a  $R_0^{pr}(N') \subset R_0^{pr}(A) \cup R_0^{pq}(N) \cup R_0^{pr}(B)$  et donc  $R_0^{pr}(N') \cap E^- \subset \{N'\}$  contradiction avec la maximalité de  $R_0^{pq}(N)$ .

□

On définit la relation  $\sim$  comme la clôture transitive de  $\sim_e$ :  $A \sim B$  si il existe des points  $A = A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n = B$  tels que  $A_i \sim_e A_{i+1}$ .

On définit  $\sim, \sim_e$  de la même façon sur  $E^-$ .

**Lemme 6.2.10** *Soit  $r \in \mathcal{D}$ . Si  $A \sim_e B$  alors  $A_r \sim B_r$ .*

*Démonstration:* Soient  $A, B, r$  vérifiant les conditions du lemme. On note  $A' = A_r$  et  $B' = B_r$ . On suppose que  $A, B \in E^+$ . Soient  $p$  et  $q$  les directions telles que  $ASP(A) = R_i^{pq}(A)$  et  $ASP(B) = R_i^{pq}(B)$  on peut supposer  $i = 0$ . Comme  $R_0^{pq}$  est un ASP on a  $r = \alpha p + \beta q$  avec  $\alpha\beta \leq 0$ . On peut aussi supposer que  $\alpha \leq 0$  et  $\beta \geq 0$ . Comme  $A \sim_e B$  il existe un point  $N \in \mathbb{Q}^2$  tel que  $R_0^{pq}(N) \cap E^- \subset \{N\}$ . De plus on peut supposer que  $p(N) \in \{p(A), p(B)\}$ ,  $q(N) \in \{q(A), q(B)\}$ . En échangeant  $A$  et  $B$  si nécessaire, on peut supposer  $r(A') = r(A) \leq r(N) \leq r(B) = r(B')$ .

Mais on sait qu'il existe  $i'$  et  $j'$  tels que  $R_{i'}^{pq}(A') \subset ASP(A')$  et  $R_{j'}^{pq}(B') \subset ASP(B')$ , de plus  $i', j'$  ne peuvent pas être nuls car  $A \in R_0^{pq}(A')$  et  $B \in R_0^{pq}(B')$ .

Il reste 9 autres cas :

- $i' = 1, j' = 1$ . Donc on a  $R_1^{pq}(A') \subset ASP(A')$ . Si  $M \in R_1^{pr}(A')$  alors  $A' \in QCONV_{pr}(A, A', M)$  et donc  $M \notin E^+$  ce qui entraîne  $R_1^{pr}(A') \subset ASP(A')$ . De la même façon  $R_1^{pr}(B') \subset ASP(B')$ .
- Si  $p(B') \leq p(A')$  alors  $R_1^{pr}(A') \subset R_1^{pr}(B')$  et donc  $A' \sim_e B'$ .
- Si  $p(B') \geq p(A')$ .

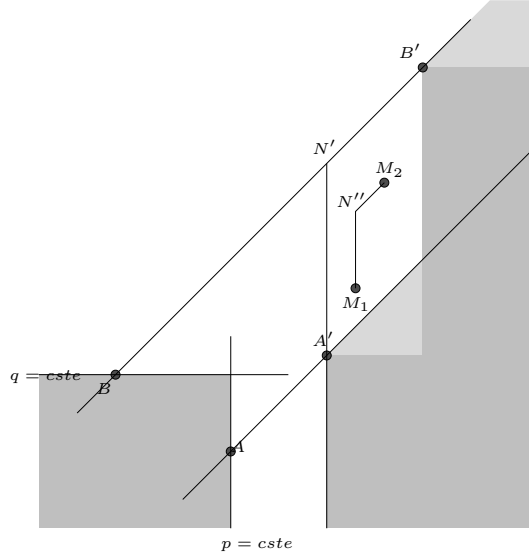


FIG. 6.5 – Cas  $i' = 1, j' = 1$  et  $p(B') \geq p(A')$ .

Soit  $N' = \langle p(A'), r(B') \rangle_{pr}$ . On a  $A', B' \in R_1^{pr}(N')$ .

On va d'abord montrer que pour tous  $M$  dans  $R_1^{pr}(N') \cap E^-$  on a  $R_1^{pr}(M) \cap E^+ = \emptyset$ : si  $M$  est dans  $ASP(A')$  ou  $ASP(B')$  c'est clair. Sinon on a  $p(M_r) < p(M)$  car sinon  $M \in QCONV_{pr}(A, B, M_r)$  ou  $M \in QCONV_{qr}(A, B, M_r)$ . Donc on n'a ni  $R_0^{pr}(M) \subset ASP(M)$  ni  $R_3^{pr}(M) \subset ASP(M)$ . Si  $R_2^{pr}(M) \subset ASP(M)$ , comme  $B' \in R_2^{pr}(M)$  on en déduit  $M \sim_e B'$  et donc  $R_2^{pr}(B') \subset ASP(B')$  ce qui est impossible. Donc  $R_1^{pr}(M) \cap E^+ = \emptyset$  pour tout  $M \in QCONV_{pr}(A, B, M_r)$ .

Soit  $M_1, M_2 \in R_1^{pr}(N')$  tels que  $p(M_1) \leq p(M_2)$ . Si  $r(M_1) \geq r(M_2)$  on a  $M_2 \in R_1^{pr}(M_1)$  et donc  $M_1 \sim_e M_2$ . Supposons par exemple que  $r(M_1) \leq r(M_2)$ . Soit  $N'' = \langle p(M_1), r(M_2) \rangle_{pr}$ . On peut alors faire la récurrence suivante  $(H_n)$ :

Si  $M_1, M_2 \in R_1^{pr}(N') \cap E^-$  tels que  $r(N'') - r(A') + p(B') - p(N'') \leq n$  et  $p(M_1) \leq p(M_2)$  alors  $M_1 \sim M_2$ .  $(H_n)$

- $H_0$  est vraie car on a  $R_1^{pr}(N'') \subset ASP(A') \cup ASP(B')$
- Supposons  $H_{n-1}$ . Soient  $M_1, M_2$  dans  $R_1^{pr}(N') \cap E^-$  vérifiant  $p(M_1) \leq p(M_2)$ . Soit  $M \in R_1^{pr}(N'') \setminus \{N''\} \cap E^+$  (S'il n'existe pas de tels points alors  $M_1 \sim_e M_2$ ). On a  $p(M_r) \geq p(M)$  car sinon  $M_r \in QCONV_{pr}(M, A, B)$  ou

$M_r \in QCONV_{qr}(M, A, B)$ . On a  $r(M_p) \leq r(M)$  car sinon  $M \in QCONV_{pr}(M_1, M_p, M_r)$ . Et donc :

$$\begin{aligned} p(M_1) &\leq p(M_p) = p(M) \leq p(M_r) \leq p(M_2) \\ r(M_1) &\leq r(M_p) \leq r(M) = r(M_r) \leq r(M_2) \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence  $M_p \sim M_1$ ,  $M_p \sim M_r$  et  $M_r \sim M_2$  donc  $M_1 \sim M_2$ .

On a donc bien  $A' \sim B'$ .

- $i' = 1, j' = 2$ . Dans ce cas on a encore  $R_1^{pr}(A') \subset ASP(A')$ .
  - Si  $p(B') \leq p(A')$  alors on a  $p(A'_{pr}) \geq p(A'_p)$  car sinon  $A'_{pr} \in QCONV_{pr}(A, B, A'_p)$  ou  $A'_{pr} \in QCONV_{qr}(A, B, A'_p)$ . Et donc  $A'_p \in QCONV_{pr}(A', B', A'_{pr})$  ce qui est *impossible*.
  - Si  $p(B') \geq p(A')$ , de la même façon on a  $B'_p \in QCONV_{pr}(A', B', B'_{pr})$  ce qui est aussi *impossible*.
- $i' = 1, j' = 3$ . On a  $R_1^{pr}(A') \subset ASP(A')$  et  $R_2^{qr}(B') \subset ASP(B')$ . On définit alors la suite  $(M_i)$  par :

$$\begin{aligned} M_0 &= A'_p \text{ if } p(A') \geq p(B') \\ M_0 &= B'_p \text{ if } p(A') \leq p(B') \\ M_{i+1} &= (M_i)_{rp} \end{aligned}$$

(voir figure 6.6)

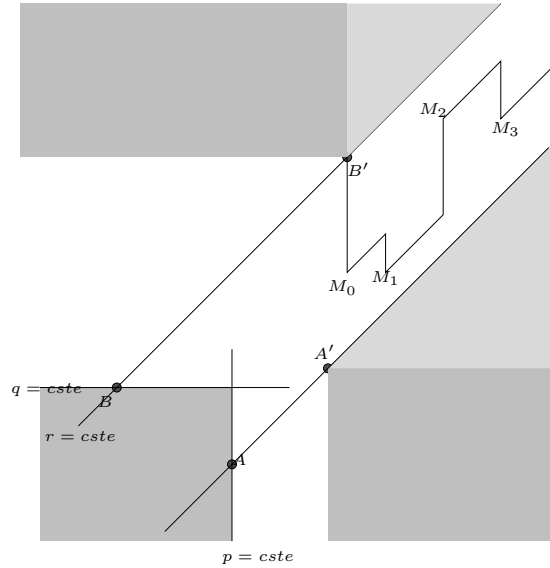


FIG. 6.6 - Cas  $i' = 1, j' = 3$  et  $p(B') \geq p(A')$ .

On a  $p(M_{i+1}) = p((M_i)_r) > p(M_i)$  car sinon  $(M_i)_r \in QCONV_{pr}(M_i, A, B)$  ou  $(M_i)_r \in QCONV_{qr}(M_i, A, B)$ . Et donc on a une suite infinie de points distincts inclus dans un ensemble fini ce qui est *impossible*.

- $i' = 2, j' = 1$ . On a  $R_1^{pr}(B') \subset ASP(B')$ .
  - Si  $p(B') \geq p(A')$  alors  $B' \in R_2^{pq}(A')$
  - Si  $p(B') \leq p(A')$  alors  $A' \in R_1^{pr}(B')$
- $i' = 2, j' = 2$ .
  - Si  $p(A') \leq p(B')$ , comme  $r(A') \leq r(B')$  on a  $q(A') \leq q(B')$  et donc  $B' \in R_2^{pq}(A')$ .
  - Si  $p(A') \geq p(B')$  et  $q(A') \geq q(B')$  alors  $A' \in R_2^{pq}(B')$ .
  - Il reste le cas  $p(A') \geq p(B')$  et  $q(A') \leq q(B')$ . Soit  $N' = \langle p(B'), q(A') \rangle_{pq}$ .  
Si  $M_1, M_2 \in R_2^{pq}(N')$  et  $p(M_1) \geq p(M_2)$  on note  $N'' = \langle p(M_2), q(M_1) \rangle_{pq}$ . On va faire une récurrence comme dans le cas  $i' = 1, j' = 1$ .

Si  $M_1, M_2 \in R_2^{pq}(N') \cap E^-$  tels que  $p(M_1) \geq p(M_2), R_2^{pq}(M_1) \cap E^+ = \emptyset$ ,  
 $R_2^{pq}(M_2) \cap E^+ = \emptyset$ , et  $p(A') - p(N'') + q(B') - q(N'') \leq n$  alors  $M_1 \sim M_2$ .  
( $H'_n$ )

Soient  $M_1, M_2$  vérifiant les conditions de ( $H'_n$ ). Soit  $M \in R_2^{pq}(N'') \setminus \{N''\} \cap E^+$ . Le point  $M_r$  vérifie  $p(M_r) \geq p(M)$ . On a aussi  $p(M_q) \geq p(M)$  car sinon  $M \in QCONV_{qr}(M_r, M_q, M_1)$ . De même  $q(M_p) \geq p(M)$  car sinon  $M \in QCONV_{pr}(M_r, M_p, M_2)$ . Donc on a :

$$\begin{aligned} p(M_1) &\geq p(M_q) \geq p(M) = p(M_p) \geq p(M_2) \\ q(M_1) &\leq q(M_q) = q(M) \leq q(M_p) \leq q(M_2) \end{aligned}$$

Donc d'après l'hypothèse de récurrence on a  $M_1 \sim M_q \sim M_p \sim M_2$ .

- $i' = 2, j' = 3$ . La démonstration est la même que dans le cas  $i' = 1, j' = 2$ .
- $i' = 3, j' = 1$ . On a  $R_2^{qr}(A') \subset ASP(A')$  et  $R_1^{pr}(B') \subset ASP(B')$ .
  - Si  $p(A') \leq p(B')$  alors  $B' \in R_2^{qr}(A')$
  - Si  $p(A') \geq p(B')$  alors  $A' \in R_1^{pr}(B')$
- $i' = 3, j' = 2$ . Similaire au cas  $i' = 2, j' = 1$ .
- $i' = 3, j' = 3$ . Similaire au cas  $i' = 1, j' = 1$ .

□

La relation  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $E = E^+ \cup E^-$ . Soit  $D_1, \dots, D_n$  les classes d'équivalence associées et  $G_i$  l'isobarycentre de  $D_i$  et  $P$  l'ensemble  $\{G_i : i \in \{1 \dots n\}\}$ .

Le lemme précédent montre que pour tout  $i \in \{0 \dots 3\}, p \in \mathcal{D}$  il existe un  $j$  tels que pour tout  $M \in D_i$  les points  $M_p$  sont sur  $D_j$ . Et donc on a  $p(G_i) = p(G_j)$ .

Donc on a

**Lemme 6.2.11** *L'ensemble  $P$  est un  $\mathcal{D}$ -polygone.*

En particulier  $P$  contient au moins trois points (car il y a au moins deux directions dans  $\mathcal{D}$ ).

**Lemme 6.2.12** Soient  $M_1, M_2 \in \mathbb{Z}^2$  et  $p, q \in \mathcal{D}$ . On définit les points  $N_1 = \langle p(M_1), q(M_2) \rangle_{pq}$ ,  $N_2 = \langle p(M_2), q(M_1) \rangle_{pq}$ , de plus on suppose  $N_1 \in R_i^{pq}(N_2)$  où  $R_i^{pq}$  est un ASP. Alors pour tous  $r, s \in \mathcal{D}$  le parallélogramme  $\{M : r(M) \in [r(M_1), r(M_2)] \text{ et } s(M) \in [s(M_1), s(M_2)]\}$  contient le parallélogramme  $\{M : p(M) \in [p(M_1), p(M_2)] \text{ et } q(M) \in [q(M_1), q(M_2)]\}$ .

*Démonstration:* Soient  $M_1, M_2, N_1, N_2, p, q, r, s, i$  comme dans le lemme. On peut supposer  $i = 2$  (ie  $p(M_1) \geq p(M_2)$  et  $q(M_1) \leq q(M_2)$ ) et  $r = \alpha p + \beta q, s = \alpha' r + \beta' q$  avec  $\alpha \leq 0, \alpha' \leq 0, \beta \geq 0, \beta' \geq 0$ . Soit  $N'_1 = \langle q(M_2), r(M_1) \rangle_{q,r}$  et  $N'_2 = \langle q(M_1), r(M_2) \rangle_{q,r}$ ,  $N''_1 = \langle r(M_1), s(M_2) \rangle_{r,s}$  et  $N''_2 = \langle r(M_2), s(M_1) \rangle_{r,s}$ . (voir figure 6.7)

Comme  $q(N'_1) = q(M_2)$  on a  $q(N'_1) \geq q(M_1)$ . De même  $q(N'_2) \leq q(M_2)$  donc  $N_1$  et  $N_2$  sont dans le parallélogramme  $M_1 N'_1 M_2 N'_2$ , donc le parallélogramme  $M_1 N_1 M_2 N_2$  est inclus dans  $M_1 N'_1 M_2 N'_2$ .

De même on peut montrer que  $M_1 N'_1 M_2 N'_2$  est inclus dans  $M_1 N''_1 M_2 N''_2$ .  $\square$

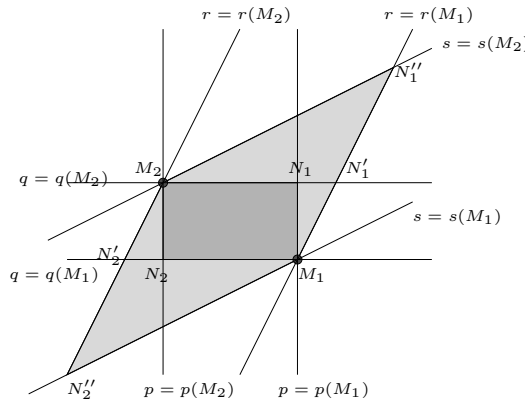


FIG. 6.7 – L'inclusion des parallélogrammes

**Lemme 6.2.13** L'ensemble  $P$  est un polygone  $Q$ -convexe fort selon  $\mathcal{D}$ .

*Démonstration:* Soit  $G$  un point de  $P$  et  $D$  la classe dont  $G$  est le barycentre.

On suppose par exemple que  $D \subset E^+$  et que tout  $M \in D$  vérifie  $ASP(M) = R_0^{pq}(M)$  avec  $p, q \in \mathcal{D}$ . Soient  $pmin, pmax, qmin, qmax$  les extrema de  $p$  et  $q$  sur  $D$ . Soient

$$B_1 = \{M | pmin \leq p(M) \leq pmax\}$$

$$B_2 = \{M | qmin \leq q(M) \leq qmax\}$$

et  $D_1$  la classe  $\{M_p | M \in D\}$ . On va montrer que  $D = B_1 \cap E^+$ : soit  $M$  un point de  $E^+ \cap B_1$ . D'après les définitions de  $pmin$  et  $pmax$  il existe  $A_0, B_0 \in D$  tels que  $pmin = p(A_0) \leq p(M) \leq p(B_0) = pmax$ . On a  $A_0 \sim B_0$ , on en déduit donc qu'il existe  $A, B \in D$  tels que  $A \sim_e B$  et  $p(A) \leq p(M) \leq p(B)$

- Si  $q(M) \leq \max(q(A), q(B))$  on sait déjà que  $M \in D$ .
- Si  $q(M) \geq \max(q(A), q(B))$  alors  $q(M_p) > q(M)$  car sinon  $M_p \in QCONV_{pq}(M, A, B)$  et donc  $R_0^{pq}(M) \subset ASP(M)$  ou  $R_1^{pq}(M) \subset ASP(M)$ . Et donc  $A$  ou  $B$  sont dans  $ASP(M)$  et donc  $M \sim_e A$ .

On en déduit aussi avec le lemme 6.2.10 que  $D_1 = B_1 \cap E^-$ . De même  $D = B_2 \cap E^+$  et  $D_2 = B_2 \cap E^-$  où  $D_2 = \{M_q | M \in D\}$ . On définit alors les 3 régions suivantes

$$\begin{aligned} V_1 &= \{M | p(M) < pmin \text{ et } q(M) > qmax\} \\ V_2 &= \{M | p(M) > pmax \text{ et } q(M) < qmin\} \\ V_3 &= \{M | p(M) > pmax \text{ et } q(M) > qmax\} \end{aligned}$$

(voir figure 6.8)

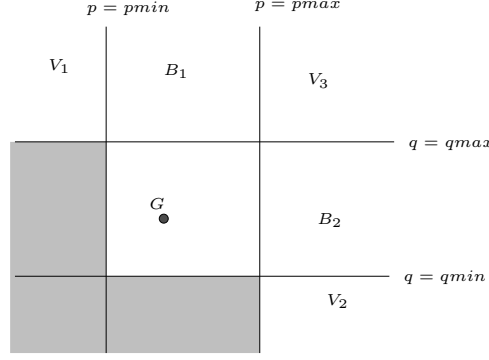


FIG. 6.8 – Les différentes régions

Supposons qu'il y ait un point  $G' \in P$  tel que  $G' \in R_0^{pq}(G)$ . Le point  $G'$  est l'isobarycentre d'une classe  $D'$ . On a  $D' \subset V_1 \cup V_2 \cup V_3$ . D'après l'emplacement de  $G'$  l'ensemble  $D'$  ne peut pas être disjoint ni avec  $V_1$  ni avec  $V_2$ . Deux cas peuvent se produire :

- Il existe  $A \in V_1, B \in V_2$  tels que  $A \sim_e B$ . Soit  $R_i^{rs}(N)$  la région donnée par la définition 6.2.8. On a  $R_i^{rs}(N) \cap D = \emptyset$  car si  $A, B \in E^-$  alors  $R_i^{rs}(N) \cap E^+ = \emptyset$  et si  $A, B \in E^+$  alors tout point de  $E^+ \cap R_i^{rs}(N)$  est équivalent à  $A$  et à  $B$ .

On déduit du lemme 6.2.12 que  $B_1 \cap B_2 \subset R_i^{rs}(N)$  ce qui est en contradiction avec  $R_i^{rs}(N) \cap D = \emptyset$ .

- Il existe  $A \in V_1, B \in V_2, C, C' \in V_3$  tels que

$$A \sim_e C \sim C' \sim_e B.$$

$D \subset R_1^{pq}(A), D \subset R_0^{pq}(C), D \subset R_3^{pq}(B)$  donc pour tout  $M \in \{A, B, C, C'\}$  on a  $ASP(M) = R_2^{pq}(M)$ . Soit  $M$  un point de  $D$ .

- Supposons que  $A, B, C, C' \in E^+$ . On a  $q(M_p) \leq \min(q(A), q(C))$  car  $R_2^{pq}(N) \cap E^- \subset \{N\}$  où  $N = \langle p(A), \min(q(A), q(C)) \rangle_{pq}$ . Et donc  $M_p \in QCONV_{pq}(M, A, C)$  ce qui est *impossible*.
- Supposons  $A, B, C, C' \in E^-$ . On a  $q(M_p) \leq \min(q(A), q(C))$  car sinon  $M_p \sim_e A$ . On a  $A \in R_3^{pq}(M_p)$  et  $A \not\sim_e M_p$  donc  $R_3^{pq}(M_p) \not\subset ASP(M_p)$ . De même  $C \in R_2^{pq}(M_p)$  et  $C \not\sim_e M_p$  donc  $R_2^{pq}(M_p) \not\subset ASP(M_p)$ . On a  $q(M) < q(M_p)$  donc  $R_0^{pq}(M_p) \cap E^+ \neq \emptyset$  et  $R_1^{pq}(M_p) \cap E^+ \neq \emptyset$ . Et donc tous les quadrants de direction  $p, q$  autour de  $M$  contiennent des points de  $E^+$  ce qui est *impossible*.  $\square$

L'ensemble  $P$  est donc un  $\mathcal{D}$ -polygone Q-convexe fort selon  $\mathcal{D}$ . On a donc prouvé l'implication (8)  $\Rightarrow$  (9) du théorème 6.2.6.

### 6.2.2.2 Les $\mathcal{D}$ -polygones $\mathbf{Q}$ -convexes forts

Dans cette section on va montrer l'implication (9)  $\Rightarrow$  (5).

On va avoir besoin d'une notion plus faible que la  $\mathcal{D}$ -polygonalité déjà introduite dans [Gar95, p34].

#### Définition 6.2.14

- On dit qu'une droite supporte  $E$  si elle délimite un demi-plan contenant  $E$ . Un point  $M$  supporte  $E$  selon  $\mathcal{D}$  si il existe une direction  $p \in \mathcal{D}$  tel que la droite  $p = p(M)$  supporte  $E$ .
- Un ensemble  $E$  est un  $\mathcal{D}$ -polygone faible si pour toutes les droites  $d$  de direction dans  $\mathcal{D}$  on a

$$|d \cap E| \in \{0, 2\} \text{ ou } (|d \cap E| = 1 \text{ et } d \text{ supporte } E).$$

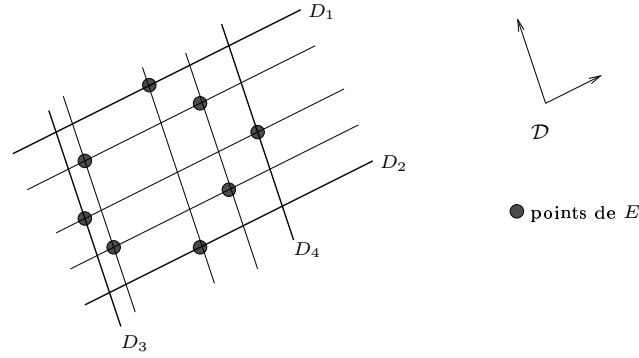


FIG. 6.9 – Un exemple de  $\mathcal{D}$ -polygone faible. Les quatre droites  $D_1, D_2, D_3, D_4$  supportent  $E$ .

Dans la suite on suppose que  $E$  est un  $\mathcal{D}$ -polygone faible et  $\mathbf{Q}$ -convexe fort selon  $\mathcal{D}$  contenant au moins 3 points.

Pour tout point  $M \in E$  il existe un ASP  $\Pi$  tel que  $\Pi \cap E = \{M\}$ . Si  $M$  ne supporte pas  $E$  alors cet ASP est unique on le note encore  $ASP(M)$ . Sinon  $E$  est compris dans un demi-plan de frontière  $p = p(M)$  avec  $p \in \mathcal{D}$ . Il y a alors en fait deux ASP qui ne contiennent aucun point de  $E$  sauf  $M$ , ils sont de la forme  $\Pi_1 = R_i^{pq}(M)$  et  $\Pi_2 = R_j^{pr}(M)$ .

Si  $p = p(M)$  contient deux points de  $E$  alors on note  $M_p$  l'unique point de  $E$  distinct de  $M$  tel que  $p(M) = p(M_p)$ . Si  $p = p(M)$  contient un seul point de  $E$  alors on note  $M_p = M$ .

**Définition 6.2.15** On dit que  $A, B \in E$  sont consécutifs (noté  $ACONSB$ ) si il existe  $p, q \in \mathcal{D}$ ,  $i, N \in \mathbb{Q}^2$  tels que  $A, B \in R_i^{pq}(N)$  et  $R_i^{pq}(N) \cap E = \{A, B\}$ .

**Lemme 6.2.16**  $ACONSB$  si et seulement si on a l'une des conditions suivantes :

- Il existe un ASP  $\Pi = R_i^{pq}(N)$  où  $N = \langle p(A), q(B) \rangle_{pq}$  et  $\Pi \cap E = \{A, B\}$ ,  $R_i^{pq}(A) \cap E = \{A\}$ ,  $R_i^{pq}(B) \cap E = \{B\}$ .



- La droite  $(AB)$  est de direction dans  $\mathcal{D}$  et supporte  $E$ .

voir figure 6.10

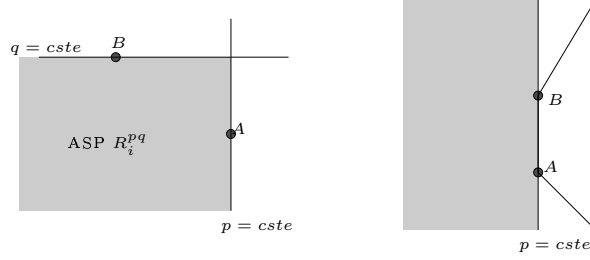


FIG. 6.10 – Les deux cas où ACONSB.

On retrouve donc la consécuitivité des saillants définie en 2.7.3.

*Démonstration:* Considérons deux points consécutifs  $A$  et  $B$ . Soit  $i, p, q, N$  comme dans la définition de CONS. On suppose de plus que  $R_i^{pq}$  est maximal pour la relation  $\prec$  définie grâce à la formule (6.2). On peut supposer  $p(N) \in \{p(A), p(B)\}$  et  $q(N) \in \{q(A), q(B)\}$ .

- Si  $N \neq A$  et  $N \neq B$  alors en fait on a  $R_i^{pq}(A) \cap E = \{A\}$  et  $R_i^{pq}(B) \cap E = \{B\}$ . On suppose que  $R_i^{pq}$  n'est pas un ASP. Comme d'habitude on suppose  $i = 0$  et que  $r$  est une direction de  $\mathcal{D}$  telle que  $r = \alpha p + \beta q$  avec  $\alpha > 0, \beta > 0$ .

De plus on peut supposer  $p(A) = p(N)$ ,  $q(B) = q(N)$ ,  $r(A) \geq r(B)$  (Ce qui est vrai à une inversion près de  $p, q$  ou (et)  $A, B$ .)

Si  $A \neq A_p$  alors pour tout  $M \in R_1^{pr}(A)$  on a  $A \in QCONV_{pr}(M, A_p, B)$  donc  $R_1^{pr}(A) \cap E = \{A\}$  ce qui entraîne  $R_0^{qr}(N') \cap E = \{A, B\}$  avec  $N' = \langle q(B), r(A) \rangle_{qr}$  ce qui est en contradiction avec la maximalité de  $R_0^{pq}$ . Voir figure 6.11.

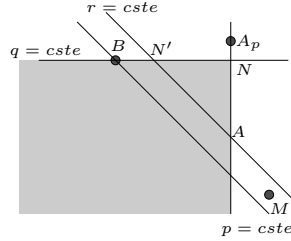


FIG. 6.11 – Cas  $A \neq A_p$

Si  $A = A_p$  alors  $E$  est inclus dans demi-plan  $p \leq p(A)$  et donc  $B = B_q$ , donc  $E$  est inclus dans  $q \leq q(B)$ , ceci implique  $E = \{A, B\}$  ce qui est impossible.

- Si  $N = A$  on a  $R_i^{pq}(B) \subset R_i^{pq}(A)$ . On peut supposer  $i = 0$ .
  - Cas  $p(A) = p(B)$ . Si  $q = q(A)$  ne supporte pas  $E$  alors il existe un point  $A_q \neq A$ . Si  $M \in R_3^{pq}(A)$  alors  $A \in QCONV_{pq}(M, A_q, B)$  et donc  $R_3^{pq}(A) \cap E = \emptyset$ . C'est encore vrai si  $q = q(A)$  supporte  $E$  (car  $R_3^{pq}$  est dans le demi-plan qui ne contient pas  $B$ ). Donc les seuls points de  $E$  dans le demi-plan  $R_0^{pq}(A) \cup R_3^{pq}(A)$  (de bord  $(AB)$ ) sont  $A$  et  $B$  ce qui correspond au deuxième cas du lemme.

- Le cas  $q(A) = q(B)$  est similaire.  
Pour les deux derniers cas on suppose  $p(A) \neq p(B)$  et  $q(A) \neq q(B)$ .
- Si  $p = p(A)$  ne supporte pas  $E$  alors  $q(A_p) > q(A)$  et  $q(B) < q(A)$  donc  $A_q \neq A$  et  $A \in QCONV_{pq}(A_p, A_q, B)$  ce qui est impossible.
- Si  $p = p(A)$  supporte  $E$  alors  $E \setminus \{A\}$  est inclus dans  $p < p(A)$  et donc  $A_q = A$  et  $q = q(A)$  supporte  $E$  donc  $E \setminus \{A\}$  est inclus dans  $q < q(A)$  et donc  $E = \{A, B\}$  ce qui est impossible.

□

On a déjà vu dans la section 2.7.3 que les points saillants quadrés forment un cycle. On peut étendre facilement le résultat dans le cas de coordonnées non forcément entières. De plus ici les points saillants sont ici tous de multiplicité 1 sauf les points supportant  $E$  qui sont de multiplicité 2 et dont les deux points quadrés sont consécutifs. La nature du graphe  $(E, \text{CONS})$  est donc la même que celui des points quadrés :

**Lemme 6.2.17** *Le graphe  $(E, \text{CONS})$  est un cycle.*

**Lemme 6.2.18** *Si  $A, B \in E$  sont consécutifs et  $r \in \mathcal{D}$  alors pour tout  $M \in E$  on a  $r(M) \geq \max(r(A), r(B))$  ou  $r(M) \leq \min(r(A), r(B))$ .*

*Démonstration:* Supposons que l'on a un point  $M$  tel que  $r(M) \in ]r(A), r(B)[$ . La droite  $r = r(M)$  ne peut pas supporter  $E$  car  $A$  et  $B$  sont de chaque côté de cette droite. Donc  $M_r \neq M$ . On va supposer  $p(M) < p(M_r)$ .

- Supposons que l'on est dans la première condition du lemme 6.2.16. Soient  $p, q, i$  comme dans ce lemme. On suppose  $i = 0$ . Si  $p(M) \geq p(A)$  on a  $M \in QCONV_{pr}(M_r, A, B)$  (voir figure 6.12), sinon on a  $q(M) \geq q(B)$  et donc  $M \in QCONV_{qr}(M_r, A, B)$  impossible.

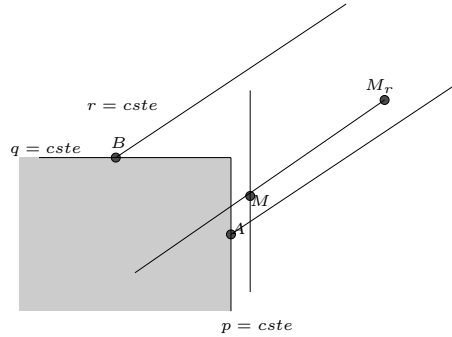


FIG. 6.12 – Cas  $p(M) \geq p(A)$

- Supposons maintenant que  $(AB)$  supporte  $E$  et est de direction  $p \in \mathcal{D}$ . On a alors  $M \in QCONV_{pr}(M_r, A, B)$ . Impossible.

□

**Définition 6.2.19** *L'ensemble  $ME$  est l'ensemble des milieux de deux points consécutifs de  $E$ .*

**Lemme 6.2.20** *Si  $E$  est un  $\mathcal{D}$ -polygone faible  $Q$ -convexe fort selon  $\mathcal{D}$  alors  $\mathcal{M}E$  est un polygone  $Q$ -convexe fort selon  $\mathcal{D}$ .*

*Démonstration:* Soit  $M$  un point de  $\mathcal{M}E$ ,  $M$  est donc le milieu d'un segment  $[AB]$  de  $E$  avec  $A \text{ CONSB}$ .

Si  $(AB)$  supporte  $E$ ,  $E$  est dans un demi-plan de frontière  $(AB)$  et donc toutes les points de  $\mathcal{M}E$  sont aussi dans ce demi-plan.

Sinon grâce au lemme 6.2.16 on sait qu'il existe un ASP qu'on peut supposer égal à  $R_0^{pq}(N)$  et qui vérifie  $R_0^{pq}(N) \cap E = \{A, B\}$ .

On va montrer que  $R_0^{pq}(M) \cap \mathcal{M}E = \{M\}$ . Supposons qu'il existe un point  $M' \in R_0^{pq}(M) \cap \mathcal{M}E \setminus \{M\}$ . Le point  $M'$  est le milieu de  $[A'B']$  avec  $A' \text{ CONSB}'$

Grâce au lemme 6.2.18 on peut supposer  $A' \in R_1^{pq}(A)$  et  $B' \in R_3^{pq}(B)$ .

La direction de la droite  $(A'B')$  ne peut pas être dans  $\mathcal{D}$  car  $R_0^{pq}$  est un ASP. Soit alors  $R_i^{rs}(N')$  la région donnée par le lemme 6.2.16. On sait que  $A$  et  $B$  sont dans le parallélogramme  $p \in [p(A), p(B)], q \in [q(A), q(B)]$ . On en déduit, grâce au lemme 6.2.12 que  $A$  et  $B$  sont dans  $R_i^{rs}(N')$  impossible.

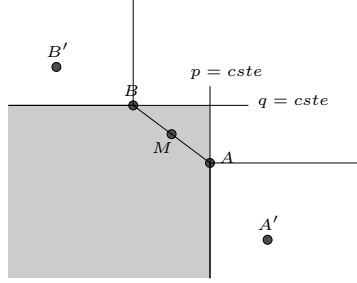


FIG. 6.13 – Pourquoi  $R_0^{pq}(M) \cap \mathcal{M}E = \{M\}$  ?

□

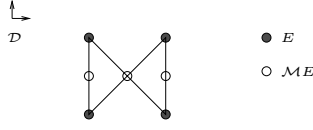
**Lemme 6.2.21** *Si  $E$  est un  $\mathcal{D}$ -polygone faible,  $A$  et  $B$  sont deux points consécutifs de  $E$ , et  $r$  est une direction de  $\mathcal{D}$  alors  $A_r$  et  $B_r$  sont deux points consécutifs de  $E$ .*

*Démonstration:* On note  $A' = A_r$ ,  $B' = B_r$ . Il faut donc montrer que  $A'$  et  $B'$  sont consécutifs. Les points  $A$  et  $B$  sont consécutifs donc on peut regarder les deux possibilités données par le lemme 6.2.16 :

- On suppose que  $A, B \in R_0^{pq}(N)$  avec  $R_0^{pq}$  ASP et  $R_0^{pq}(N) \cap E = \{A, B\}$ . On peut supposer  $p(A) > p(B)$ ,  $q(A) < q(B)$  et  $r = \alpha p + \beta q$  avec  $\alpha \leq 0$  et  $\beta \geq 0$  car  $R_0^{pq}$  est un ASP. Il n'y a aucun point de  $E$  dans la bande  $r(A) < r < r(B)$ . Si  $A = A'$  alors on a  $E \cap \{r \leq r(B)\} = \{A, B, B'\}$  et donc il existe  $N$  tel que  $R_1^{pr}(N) \cap E = \{A, B'\}$  et donc  $A \text{ CONSB}'$ . Idem si  $B = B'$ .

Sinon on sait qu'il existe  $i, j \neq 0$  tel que  $R_i^{pq}(A') \cap E = \{A'\}$  et  $R_j^{pq}(B') \cap E = \{B'\}$ . On ne peut pas avoir  $i \neq j$  car il n'y a aucun point de  $E$  dans la bande  $r(A) < r < r(B)$  et donc on ne peut pas placer  $A'_p, A'_q, B'_p, B'_q$ . Comme  $i = j$  et il n'y a aucun point dans la bande  $r(A) < r < r(B)$  on sait que  $A' \text{ CONSB}'$  (voir figure 6.14)



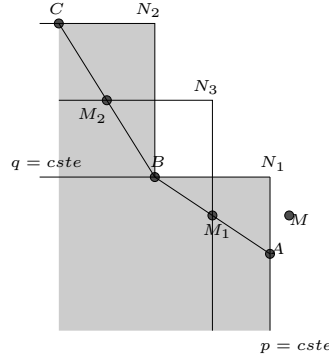
FIG. 6.15 – Un  $\mathcal{D}$ -polygone  $Q$ -convexe mal ordonné

Le prochain lemme montre que la transformation  $\mathcal{M}$  conserve la consécutivité.

**Lemme 6.2.24** *Deux points de  $\mathcal{M}E$  sont consécutifs si et seulement si ils proviennent de deux segments consécutifs de  $E$ .*

*Démonstration:* Soient  $A, B, C$  tels que  $ACONSBCONS$ . Soient  $M_1, M_2$  les milieux de  $[AB]$  et  $[BC]$ . On va voir toutes les possibilités données par le lemme 6.2.16.

- 1er cas : Il existe  $i, p, q, N_1, N_2$  tels que  $R_i^{pq}(N_1) \cap E = \{A, B\}$  et  $R_i^{pq}(N_2) \cap E = \{B, C\}$ . Les points de  $E$  qui sont dans la bande  $p \in ]p(A), p(C)[$  sont  $B, B_p$ . Les points de  $E$  qui sont dans la bande  $]q(A), q(C)[$  sont  $B, B_q$ . Soit  $N_3$  tel que  $M_1, M_2$  sont sur le bord de  $R_i^{pq}(N_3)$ . Supposons que nous avons deux points consécutifs  $P_1$  et  $P_2$  tels que le milieu de  $[P_1 P_2]$  est dans  $R_i^{pq}(N_3)$ . Alors l'un des points  $A, B, C$  est dans le parallélogramme  $p \in [p(P_1), p(P_2)], q \in [q(P_1), q(P_2)]$  et donc grâce au lemme 6.2.12  $P_1$  et  $P_2$  ne peuvent pas être consécutifs contradiction. On en déduit que  $R_i^{pq}(N_3) \cap \mathcal{M}E = \{M_1, M_2\}$  et donc  $M_1$  et  $M_2$  sont consécutifs. (voir figure 6.16)

FIG. 6.16 – Pourquoi  $M_1$  et  $M_2$  sont consécutifs ?

- 2e cas :  $B_p = B$ . On a alors  $p(A) = p(C)$  et donc  $(M_1 M_2)$  est de direction  $p$  et supporte  $\mathcal{M}E$  et donc  $M_1 \text{CONS} M_2$ .
- 3e cas :  $(AB)$  supporte  $E$ . On peut supposer que  $E$  est inclus dans  $\{p \geq p(A)\}$ . On a alors  $E \cap \{p \leq p(C)\} = \{A, B, C, C_p\}$  et donc  $\mathcal{M}E \cap \{p \leq p(C)\} = \{M_1, M_2, M_{-1}\}$  où  $M_{-1}$  est le milieu de  $[A, C_p]$ .

□

Maintenant on va revenir aux  $\mathcal{D}$ -polygones *non* faibles.

**Lemme 6.2.25** *Si  $E$  est  $\mathcal{D}$ -polygone  $Q$ -convexe fort selon  $\mathcal{D}$  alors  $\mathcal{M}^2 E$  est  $\mathcal{D}$ -polygone  $Q$ -convexe fort selon  $\mathcal{D}$ .*

*Démonstration:* Soit  $M$  un point de  $\mathcal{M}^2 E$ . Ce point est le milieu de deux sommets consécutifs  $M_1, M_2$  de  $\mathcal{M}E$ . D'après le lemme précédent ces deux points proviennent de trois points consécutifs  $A, B, C$  de  $E$ .

Soit  $r$  une direction de  $\mathcal{D}$  et  $A' = A_r, B' = B_r, C' = C_r$  et  $M'_1, M'_2, M'$  les milieux de  $[A'B'], [B'C'], [M'_1 M'_2]$ . D'après le lemme 6.2.21 le point  $M'$  est dans  $\mathcal{M}^2 E$ , pour montrer que  $E$  est un  $\mathcal{D}$  polygone il suffit donc de prouver que  $M \neq M'$ .

Supposons donc  $M = M'$ . Comme dans le lemme 6.2.22 on sait que  $M_1 = M'_2$  et  $M_2 = M'_1$  mais alors  $AB'BC'$  est un parallélogramme et  $(AC')$  est parallèle à  $(BB')$  donc à  $(AA')$  et par conséquent  $C \in \{A, A'\}$  et  $C' \in \{A, A'\}$ . Donc  $A = C$  ou  $A' = C, C' = A$ . Mais le cas  $A = C$  est impossible par hypothèse. Donc on a  $A = C'$ , mais  $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AC'}$ . Donc  $B = B'$ , ce qui est impossible car  $E$  est un  $\mathcal{D}$ -polygone.  $\square$

Maintenant on va itérer le processus. On ordonne  $E$  par la relation de consécuitivité :  $E = (A_i)_{0 \leq i \leq m}$  où  $A_0 = A_m$  et  $A_i \text{CONSA}_{i+1}$ . On définit alors  $E_n = (A_i^n)$  par la récurrence

$$A_i^0 = A_i, \quad A_i^{n+1} = \frac{\frac{A_{i-1}^n + A_i^n}{2} + \frac{A_i^n + A_{i+1}^n}{2}}{2} = \frac{1}{4}A_{i-1}^n + \frac{1}{2}A_i^n + \frac{1}{4}A_{i+1}^n$$

où les indices sont calculés modulo  $m$ .

Grâce au lemme 6.2.21 on peut montrer par récurrence sur  $n$  que  $A_i^n$  et  $A_{i+1}^n$  sont consécutifs et donc que  $E_n = \mathcal{M}^{2n} E$ . Le lemme précédent montre que  $E_n$  est un  $\mathcal{D}$ -polygone. En fait on a un lemme plus précis :

**Lemme 6.2.26** *Si  $A_i, A_j \in E$  vérifient  $i \neq j$ ,  $p(A_i) = p(A_j)$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $p(A_i^n) = p(A_j^n)$ .*

*Démonstration:* Montrons cette propriété par récurrence sur  $n$ . Supposons donc que  $p(A_i^n) = p(A_j^n)$ . D'après les lemmes 6.2.17 et 6.2.21 on sait que les seuls points consécutifs de  $A_j^n = (A_i^n)_p$  sont  $(A_{i-1}^n)_p$  et  $(A_{i+1}^n)_p$ . D'autre part d'après les lemmes 6.2.24 et 6.2.17 on sait que les points consécutifs de  $A_j^n$  sont  $A_{j-1}^n$  et  $A_{j+1}^n$ . Donc

$$\{(A_{i-1}^n)_p, (A_{i+1}^n)_p\} = \{A_{j-1}^n, A_{j+1}^n\}.$$

et donc  $p(A_i^{n+1}) = p(A_j^{n+1})$ .  $\square$

Maintenant on va voir que lorsque l'on fait tendre  $n$  vers l'infini alors  $(E_n)$  converge vers un polygone affinement régulier. Ce résultat est connu depuis Darboux ([Dar78]) :

**Lemme 6.2.27** *Si  $|\mathcal{D}| \geq 3$  alors la suite  $\frac{E_n - G}{\cos^{2n}(\frac{\pi}{m})}$  où  $G$  est le centre de gravité de  $E$  converge vers un  $\mathcal{D}$ -polygone affinement régulier.*

*Démonstration:* Considérons l'application linéaire  $\phi : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$  définie par  $\phi(z_0, \dots, z_{m-1}) = (\frac{1}{4}z_{i-1} + \frac{1}{2}z_i + \frac{1}{4}z_{i+1})_{0 \leq i < m}$  où les indices sont calculés modulo  $m$ . On remarque  $E_n = \phi^n(E)$ . L'application linéaire  $\phi$  a pour matrice de représentation :

$$K = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Or la matrice  $K$  est diagonalisable. Plus précisément les vecteurs propres propres de  $K$  sont  $Y_j = (e^{i\frac{2\pi jk}{m}})_{0 \leq k < m}$  associés aux valeurs propres  $v_j = \cos^2(\frac{j\pi}{m})$ .

La famille  $(Y_j)$  est une base de  $\mathbb{C}^m$ , on peut donc écrire  $E = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j Y_j$ . On a

$$E = \lambda_0 Y_0 + \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} (\lambda_j Y_j + \lambda_{m-j} \bar{Y}_j) + \lambda_{\frac{m}{2}} Y_{\frac{m}{2}}$$

où  $z \mapsto \bar{z}$  désigne la conjugaison de  $\mathbb{C}$ , donc :

$$E_n = \lambda_0 Y_0 + \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1} \cos^{2n}(\frac{j\pi}{m}) (\lambda_j Y_j + \lambda_{m-j} \bar{Y}_j) + (-1)^n \lambda_{\frac{m}{2}} Y_{\frac{m}{2}}$$

Soit  $r = \max\{j \geq 1 : \lambda_j \neq 0 \text{ ou } \lambda_{m-j} \neq 0\}$  et

$$F = (B_i)_{0 \leq i < m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n - \lambda_0 Y_0}{\cos^{2n}(\frac{r\pi}{m})}$$

comme  $\cos(\frac{j\pi}{m}) > \cos(\frac{j'\pi}{m})$  pour  $0 \leq j < j' \leq \frac{m}{2}$  on a  $F = \lambda_r Y_r + \lambda_{m-r} \bar{Y}_r$ ,  $F$  est donc l'image par l'application  $\mathbb{R}$ -linéaire  $\phi : z \mapsto \lambda_r z + \lambda_{m-r} \bar{z}$  du polygone  $Y_r$ .

Comme les polygones  $E_r$  sont tous de genre 1, et que  $Y_r$  est de genre  $r$ , on a forcément  $r = 1$ . Plus élémentairement on peut supposer que l'ordre de  $E$  vérifie

$$p(A_0) = p(A_1) \leq p(A_2) \leq \dots \leq p(A_{j_{\max}}) = p(A_{j_{\max}+1}) \geq p(A_{j_{\max}+2}) \geq \dots \geq p(A_{m-1}) \geq p(A_0)$$

où  $p$  est une direction de  $\mathcal{D}$ , ces inégalités sont alors vérifiées par tous les  $E_n$  donc en passant à la limite on obtient :

$$p(B_0) = p(B_1) \leq p(B_2) \leq \dots \leq p(B_{j_{\max}}) = p(B_{j_{\max}+1}) \geq p(B_{j_{\max}+2}) \geq \dots \geq p(B_{m-1}) \geq p(B_0)$$

or seule l'image affine du polygone  $Y_1$  peut vérifier ces inégalités.

Donc  $r = 1$ , comme  $Y_0 = (1, 1, \dots, 1)$  et  $\lambda_0$  est l'affixe du centre de gravité  $G$  de  $E$ ,  $F$  est la limite de  $\frac{E_n - G}{\cos^{2n}(\frac{\pi}{m})}$ .

D'après le lemme 6.2.26 si  $p(A_i) = p(A_j)$  alors  $p(B_i) = p(B_j)$ . Donc si  $\phi$  est bijective alors  $F$  est un  $\mathcal{D}$ -polygone affinement régulier.

Supposons donc que  $\phi$  n'est pas bijective. L'image réciproque par  $\phi$  d'un point est donc toujours contenue dans une droite car  $\phi$  n'est pas constante ( $\lambda_1 \neq 0$  ou  $\lambda_{m-1} \neq 0$ ). Or comme  $Y_1$  est un polygone convexe il ne peut y avoir 3 sommets de  $Y_1$  alignés. Donc pour tout  $M \in F = \phi(Y_1)$  on a  $|\{N \in Y_1 : \phi(N) = M\}| \leq 2$ . D'autre part le polygone  $F$  est inclus dans une droite. On a aussi supposé que  $\mathcal{D}$  contient au moins trois directions  $\{p_1, p_2, p_3\}$ . Soit  $B_i$  un point de  $F$ , il existe  $i_1, i_2, i_3$  distincts et différents de  $i$  tels que  $p_k(B_i) = p_k(B_{i_k})$ . Comme on ne peut avoir un seul  $i_k$  tel que  $B_i = B_{i_k}$ , les directions  $p_l$  avec  $l \neq k$  sont toutes les deux égales à la direction de  $F$  ce qui est impossible car elles sont distinctes.  $\square$

Si  $|\mathcal{D}| = 2$  alors tout parallélogramme à cotés parallèles aux directions de  $\mathcal{D}$  est un  $\mathcal{D}$ -polygone affinement régulier.

On a donc démontré :

**Lemme 6.2.28** *Si il existe un  $\mathcal{D}$ -polygone  $Q$ -convexe fort alors il existe un  $\mathcal{D}$ -polygone affinement régulier dans  $\mathbb{R}^2$ .*

Ce qui est exactement (9)  $\Rightarrow$  (5) dans le théorème 6.2.6.

### 6.2.3 Corollaires

**Corollaire 6.2.29** *Si  $|\mathcal{D}| \geq 7$ , alors on a  $\text{UNICITÉ}(\mathcal{Q}(\mathcal{D}), \mathcal{D})$ .*

*Démonstration:* En effet l'assertion (7) du théorème 6.2.6 implique  $|\mathcal{D}| \leq 6$ .  $\square$

Dans le chapitre précédent on a trouvé un algorithme polynomial pour résoudre  $\text{RECONSTRUCTION}(\mathcal{Q}(\mathcal{D}), \mathcal{D})$ .

D'après la proposition 2.6.1 un totalement convexe est toujours Q-convexe, donc si on sait reconstruire une solution Q-convexe et si cette solution est unique, pour savoir si il y a une solution totalement convexe il suffit de regarder si cette solution Q-convexe est totalement convexe.

**Corollaire 6.2.30** *Si  $\mathcal{D}$  ne satisfait pas aux conditions équivalentes du théorème 6.2.4 alors  $\text{RECONSTRUCTION}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  peut être résolu en  $O(n^7)$  opérations.*

On a aussi un corollaire pour la reconstruction dans  $\mathbb{Z}^n$  :

**Corollaire 6.2.31** *Si  $\mathcal{D}$  est un ensemble de plus de 7 directions coplanaires alors on peut trouver un totalement convexe à partir de ses projections selon  $\mathcal{D}$  en temps polynomial.*

En effet on peut appliquer l'algorithme de reconstruction 2D dans chaque plan parallèle aux directions de  $\mathcal{D}$ .

## 6.3 Unicité d'une solution donnée

Jusque là on s'est intéressé à l'unicité de toutes les instances possibles du problème de la reconstruction. Mais on peut aussi se poser le problème suivant : étant donnée une partie de  $\mathbb{Z}^2$  existe-t-il une autre partie de  $\mathbb{Z}^2$  ayant les mêmes projections? Plus précisément le problème  $\text{ESTUNIQUE}(\mathcal{F}, \mathcal{D})$  est le suivant :

$\text{ESTUNIQUE}(\mathcal{F}, \mathcal{D})$  .

Donnée : Une partie  $E \in \mathcal{F}$

Question : Existe-t-il un ensemble  $F \in \mathcal{F}$  tel que  $F \neq E$  et  $\forall p \in \mathcal{D} \forall i, j \in \mathbb{Z} X_p E(i) = X_p F(i)$  ?

Par exemple si on prend  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{Z}^2)$ , et  $\mathcal{D} = \{x, y\}$ , on sait qu'il n'y pas unicité en général car les deux ensembles  $E_1 = \{(0,0), (1,1)\}$  et  $E_2 = \{(1,0), (0,1)\}$  ont les même projections (la réponse pour  $\text{ESTUNIQUE}$  avec  $E$  égal à  $E_1$  ou  $E_2$  est donc *non*). Par contre l'ensemble  $E_3 = \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$  est le seul à avoir pour projections les vecteurs  $[2,1], [2,1]$ .

Les complexités pour différents couples  $(\mathcal{D}, \mathcal{F})$  seront données dans la section 8.1.2.

En fait ce problème est fortement lié au problème de la reconstruction avec localisation a priori :

**Proposition 6.3.1** *Si  $\mathcal{D}$  est un ensemble de directions et  $\mathcal{F}$  une classe contenue dans les convexes simples selon  $\mathcal{D}$ , alors  $\text{ESTUNIQUE}(\mathcal{F}, \mathcal{D})$  peut être résolu en  $O(nC)$  opérations où  $n = \max_{p \in \mathcal{D}} (\max_{M \in E} p(M) - \min_{M \in E} p(M))$  et  $C$  est la complexité de  $\text{RECONSLOC}$ .*



*Démonstration:* Soit donc  $E$  une partie de  $\mathbb{Z}^2$  dans la classe  $\mathcal{F}$ . On se fixe une direction  $p \in \mathcal{D}$  arbitraire. Si il existe  $F \in \mathcal{F}$  différent de  $E$  ayant les mêmes projections que  $E$  alors il existe une droite parallèle à  $p$  telle que  $F$  ne contient pas un des points extrêmes de  $E$  sur cette droite. On peut donc utiliser l'algorithme 5 pour résoudre le problème *ESTUNIQUE*.  $\square$

---

**Algorithme 5** *ESTUNIQUE*( $\mathcal{F}, \mathcal{D}$ ) où  $\mathcal{F}$  est contenue dans les convexes simples selon  $\mathcal{D}$

---

On choisit  $p \in \mathcal{D}$  arbitraire.

**pour tout**  $i \in \{pmin \dots pmax\}$  **faire**

$A, B \leftarrow$  les points tels que  $[AB] = E \cap \{p = i\}$

Résout RECONSLOC( $\mathcal{F}, \mathcal{D}$ ) avec  $(X_q(E))_{q \in \mathcal{D}}$ ,  $\alpha_0 = \emptyset$ ,  $\beta_0 = \mathbb{Z}^2 \setminus \{A\}$

**si** il y a une solution **alors**

retourne NON UNIQUE

**fin si**

Résout RECONSLOC( $\mathcal{F}, \mathcal{D}$ ) avec  $(X_q(E))_{q \in \mathcal{D}}$ ,  $\alpha_0 = \emptyset$ ,  $\beta_0 = \mathbb{Z}^2 \setminus \{B\}$

**si** il y a une solution **alors**

retourne NON UNIQUE

**fin si**

**fin pour**

retourne UNIQUE

---

# Chapitre 7

## Reconstruction approchée des Q-convexes forts

Au chapitre 5 on a trouvé un algorithme pour reconstruire un Q-convexe à partir de ses projections. Mais va-t-il être utilisable en pratique? En fait le problème majeur est l'obligation d'avoir des projections sans aucune erreur, en effet si on modifie légèrement les projections alors l'algorithme répondra sans doute qu'il n'y a pas de solution. On ne peut donc utiliser cette méthode que dans les cas où on fait des mesures sans erreur, comme par exemple en microscopie électronique où on parvient à compter directement le nombre d'atomes. Mais dès que les objets sont des discrétisés d'objets continu il faut aussi chercher des algorithmes donnant des solutions approchées.

Le travail décrit dans ce chapitre a été réalisé avec la collaboration d'Alberto Del Lungo et Sara Brunetti.

### 7.1 Avec deux directions

On va maintenant s'intéresser au problème algorithmique suivant :

RECAPPRO( $\mathcal{F}, p, q$ ) (*Reconstruction approchée*).

Donnée : Quatre suites  $(p_i)_{i \in \mathbb{Z}}, (p'_i)_{i \in \mathbb{Z}}, (q_j)_{j \in \mathbb{Z}}, (q'_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et à support fini.

Sortie : Un ensemble  $E \in \mathcal{F}$ , si il existe, dont les projections vérifient  $\forall i, j \in \mathbb{Z} p_i \leq X_p(i) \leq p'_i, q_j \leq X_q(j) \leq q'_j$

On prend les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
 pmin &= \min\{i : p_i > 0\}, & pmax &= \max\{i : p_i > 0\} \\
 qmin &= \min\{j : q_j > 0\}, & qmax &= \max\{j : q_j > 0\} \\
 pmin' &= \min\{i : p'_i > 0\}, & pmax' &= \max\{i : p'_i > 0\} \\
 qmin' &= \min\{j : q'_j > 0\}, & qmax' &= \max\{j : q'_j > 0\} \\
 lp &= pmax' - pmin' + 1, & lq &= qmax' - qmin' + 1 \\
 \Delta &= \{N \in \mathbb{Z}^2 \mid pmin' \leq p(N) \leq pmax' \text{ et } qmin' \leq q(N) \leq qmax'\}.
 \end{aligned}$$

Si  $[pmin, pmax] \not\subset [pmin', pmax']$  ou  $[qmin, qmax] \not\subset [qmin', qmax']$  alors le problème n'a pas de solution. On va étudier en détail le cas où  $[pmin, pmax] = [pmin', pmax']$  et  $[qmin, qmax] = [qmin', qmax']$  en restreignant le problème RECAPPRO :

RECAPPROB( $\mathcal{F}, p, q$ ) (*Reconstruction approchée avec mêmes bornes*).

Donnée : Quatre suites  $(p_i)_{i \in \mathbb{Z}}, (p'_i)_{i \in \mathbb{Z}}, (q_j)_{j \in \mathbb{Z}}, (q'_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et à support fini telles que  $pmin = pmin', pmax = pmax', qmin = qmin', qmax = qmax'$ .

Sortie : Un ensemble  $E \in \mathcal{F}$ , si il existe, dont les projections vérifient  $\forall i, j \in \mathbb{Z} \ p_i \leq X_p(i) \leq p'_i, q_j \leq X_q(j) \leq q'_j$

Donc toutes les solutions de RECAPPROB ont un point dans chaque coté du parallélogramme  $\Delta$ .

Si on a un algorithme pour le problème RECAPPROB, pour résoudre RECAPPRO il suffit d'appliquer cet algorithme avec les projections  $((pp_i), (pp'_i), (qq_j), (qq'_j))$  où  $pp$  et  $qq$  sont définies par :

$$\begin{aligned} pp_i &= \max(1, p_i) \text{ si } i = ppmin \text{ ou } i = ppmax \\ pp_i &= p_i \text{ sinon} \\ pp'_i &= 0 \text{ si } i < ppmin \text{ ou } i > ppmax \\ pp'_i &= p'_i \text{ sinon} \\ qq_j &= \max(1, q_j) \text{ si } j = qqmin \text{ ou } j = qqmax \\ qq_j &= q_j \text{ sinon} \\ qq'_j &= 0 \text{ si } j < qqmin \text{ ou } j > qqmax \\ qq'_j &= q'_j \text{ sinon} \end{aligned}$$

et ceci pour tout  $ppmin, ppmax, qqmin, qqmax$  vérifiant

$$pmin' \leq ppmin \leq pmin, \quad pmax \leq ppmax \leq pmax',$$

$$qmin' \leq qqmin \leq qmin, \quad qmax \leq qqmax \leq pmax'.$$

Il y a donc  $(lp^2lq^2)$  possibilités pour  $ppmin, ppmax, qqmin, qqmax$ .

On en déduit que si on a un algorithme de complexité  $C$  pour résoudre RECAPPROB alors on a un algorithme de complexité  $(lp^2lq^2)C$  pour résoudre RECAPPRO, en particulier RECAPPRO et RECAPPROB sont polynomialement équivalents.

Le but de ce chapitre est de présenter un algorithme polynomial pour résoudre RECAPPROB( $\mathcal{Q}(p, q), p, q$ ). Pour cela on va essayer d'exprimer directement l'existence d'une solution  $Q$ -convexe par une 2-formule. On se fixe donc pour toute cette section les quatre projections  $(p_i), (p'_i), (q_j), (q'_j)$  qui vérifient les hypothèses de donnée de RECAPPROB.

### 7.1.1 Les variables booléennes

A chaque point  $M$  de  $\Delta$  on va associer 4 variables booléennes  $(V_k(M))_{k \in K}$  où  $K = \{0, 1, 2, 3\}$ . La variable  $V_k(M)$  exprime le fait que la solution  $E$  va vérifier  $R_k(M) \cap E = \emptyset$ . L'idée d'utiliser de telles variables est due à Chrobak et Dürr ([CD99]), mais ils ne l'avaient fait que pour des directions horizontales et verticales.

Plus précisément à une partie de  $\mathbb{Z}^2$   $E$  on va associer l'instanciation  $V = \Psi(E)$  des variables booléennes  $V_k(M)$  définie par :

$$V = \Psi(E) \text{ ssi } V_k(M) = "R_k(M) \cap E = \emptyset", \text{ avec } k \in K, M \in \Delta.$$

Réciproquement à une instanciation  $V$  des variables booléennes on va associer la partie de  $\mathbb{Z}^2$   $E = \Phi(V)$  suivante

$$E = \Phi(V) \text{ ssi } E = \{M \in \Delta \mid \neg V_k(M), \forall k \in K\}.$$

La formule exprimant l'existence d'une solution Q-convexe va être constituée de 3 sous-formules exprimant respectivement la Q-convexité, la borne inférieure, et enfin la borne supérieure.

### 7.1.2 Expression de la Q-convexité

On prend les notations  $\kappa, \delta$  de la section 2.1. La Q-convexité peut alors être exprimée à l'aide des formules suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0 &= \bigwedge_{\substack{\langle i,j \rangle \in \Delta \\ \langle i-\delta,j \rangle \in \Delta}} ((V_0(\langle i,j \rangle) \Rightarrow V_0(i-\delta,j))) \wedge \bigwedge_{\substack{\langle i,j \rangle \in \Delta \\ \langle i,j-\delta \rangle \in \Delta}} (V_0(\langle i,j \rangle) \Rightarrow V_0(\langle i,j+\delta \rangle)) \\ &\quad \wedge \bigwedge_{\langle i,j \rangle \in \Delta} \bigwedge_{\substack{0 < u < \delta \\ 0 < v < \delta \\ v \equiv \kappa u [\delta] \\ \langle i-u,j-v \rangle \in \Delta}} (V_0(\langle i,j \rangle) \Rightarrow V_0(\langle i-u,j-v \rangle)) \\ \mathcal{R}_1 &= \bigwedge_{\substack{\langle i,j \rangle \in \Delta \\ \langle i+\delta,j \rangle \in \Delta}} ((V_0(\langle i,j \rangle) \Rightarrow V_0(i+\delta,j))) \wedge \bigwedge_{\substack{\langle i,j \rangle \in \Delta \\ \langle i,j-\delta \rangle \in \Delta}} (V_0(\langle i,j \rangle) \Rightarrow V_0(\langle i,j+\delta \rangle)) \\ &\quad \wedge \bigwedge_{\langle i,j \rangle \in \Delta} \bigwedge_{\substack{0 < u < \delta \\ 0 < v < \delta \\ v \equiv -\kappa u [\delta] \\ \langle i+u,j-v \rangle \in \Delta}} (V_0(\langle i,j \rangle) \Rightarrow V_0(\langle i+u,j-v \rangle)) \\ \mathcal{R}_2 &= \bigwedge_{\substack{\langle i,j \rangle \in \Delta \\ \langle i+\delta,j \rangle \in \Delta}} ((V_0(\langle i,j \rangle) \Rightarrow V_0(i+\delta,j))) \wedge \bigwedge_{\substack{\langle i,j \rangle \in \Delta \\ \langle i,j+\delta \rangle \in \Delta}} (V_0(\langle i,j \rangle) \Rightarrow V_0(\langle i,j+\delta \rangle)) \\ &\quad \wedge \bigwedge_{\langle i,j \rangle \in \Delta} \bigwedge_{\substack{0 < u < \delta \\ 0 < v < \delta \\ v \equiv \kappa u [\delta] \\ \langle i+u,j+v \rangle \in \Delta}} (V_0(\langle i,j \rangle) \Rightarrow V_0(\langle i+u,j+v \rangle)) \\ \mathcal{R}_3 &= \bigwedge_{\substack{\langle i,j \rangle \in \Delta \\ \langle i-\delta,j \rangle \in \Delta}} ((V_0(\langle i,j \rangle) \Rightarrow V_0(i-\delta,j))) \wedge \bigwedge_{\substack{\langle i,j \rangle \in \Delta \\ \langle i,j+\delta \rangle \in \Delta}} (V_0(\langle i,j \rangle) \Rightarrow V_0(\langle i,j+\delta \rangle)) \\ &\quad \wedge \bigwedge_{\langle i,j \rangle \in \Delta} \bigwedge_{\substack{0 < u < \delta \\ 0 < v < \delta \\ v \equiv -\kappa u [\delta] \\ \langle i-u,j+v \rangle \in \Delta}} (V_0(\langle i,j \rangle) \Rightarrow V_0(\langle i-u,j+v \rangle)) \end{aligned}$$

On désigne par  $QCONV$  la formule  $\mathcal{R}_0 \wedge \mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_2 \wedge \mathcal{R}_3$ . La formule  $QCONV$  peut sembler compliquée mais c'est seulement la conjonction des formules  $V_k(M) \Rightarrow V_k(N)$  avec  $N \in R_k(M)$  et  $M$  et  $N$  assez proches.

**Lemme 7.1.1** *Si  $V$  est une instanciation des variables booléennes vérifiant  $\mathcal{R}_k$  alors  $V$  vérifie pour tous  $M, N \in \Delta$  tel que  $N \in R_k(M)$  la formule :*

$$V_k(M) \Rightarrow V_k(N).$$

*Démonstration:* On suppose par exemple  $k = 0$  et  $M = \langle i_M, j_M \rangle$ . Grâce la formule  $\mathcal{R}_0$  on sait que pour tout  $i, j$ , on a  $V_0(\langle i, j \rangle) \Rightarrow V_0(\langle i - \delta, j \rangle)$  et  $V_0(\langle i, j \rangle) \Rightarrow V_0(\langle i, j - \delta \rangle)$ . Donc on peut montrer par récurrence :  $V_0(M) \Rightarrow V_0(\langle i_M - k\delta, j_M - l\delta \rangle)$ , pour tout  $k, l \in \mathbb{N}$ .

Soit  $N$  un point de  $R_0(M)$ . Soit  $N'$  tel que

$$\frac{p(M) - p(N')}{\delta} = \left\lfloor \frac{p(M) - p(N)}{\delta} \right\rfloor, \quad \frac{q(M) - q(N')}{\delta} = \left\lfloor \frac{q(M) - q(N)}{\delta} \right\rfloor$$

On vient juste de montrer que l'on a  $V_0(M) \Rightarrow V_0(N')$  et comme la formule  $V_0(N') \Rightarrow V_0(N)$  est dans  $\mathcal{R}_0$  on a bien  $V_0(M) \Rightarrow V_0(N)$ .  $\square$

Le lemme suivant montre que  $QCONV$  exprime bien la  $Q$ -convexité :

**Lemme 7.1.2** – *Pour tout ensemble  $E \subset \Delta$  l'instanciation  $V = \Psi(E)$  satisfait toujours les formules  $QCONV$ .*

– *Si l'instanciation  $V$  satisfait la formule  $QCONV$ , alors  $E = \Phi(V)$  est  $Q$ -convexe selon  $p$  et  $q$ .*

*Démonstration:*

- Soient  $M, N \in \Delta$  tel que  $N \in R_k(M)$ . On a alors  $R_k(N) \subset R_k(M)$  donc comme  $V = \Psi(E)$  on a  $V_k(M) \Rightarrow V_k(N)$  et donc en particulier les formules  $\mathcal{R}_k$ .
- Si  $M \notin E$ , il existe  $k$  tel que  $V_k(M)$  et donc d'après le lemme 7.1.1, on  $V_k(N)$  pour tout  $N \in R_k(M)$ . Et donc  $R_k(M) \cap E = \emptyset$ .  $\square$

**Remarque 7.1.3** *Il peut sembler bizarre que la première partie du lemme ne contienne pas d'hypothèse de  $Q$ -convexité sur  $E$ , mais ceci est normal car on peut montrer en fait que pour tout  $E \subset \Delta$  l'ensemble  $\Phi \circ \Psi(E)$  est égal à l'enveloppe  $Q$ -convexe de  $E$ .*

### 7.1.3 La borne inférieure

Maintenant on va exprimer que les projections des solutions sont supérieures aux  $p_i$ . On va considérer une seule droite  $p = i$ . Soit  $qmin_i = \min\{j | \langle i, j \rangle \in \Delta\}$  et  $qmax_i = \max\{j | \langle i, j \rangle \in \Delta\}$ . Il faut remarquer que si  $\delta \neq 1$  ces nombres ne sont pas toujours égaux à  $qmin$  et  $qmax$ .

La formule  $\text{LB}(p,i,l)$  va exprimer que  $X_p(i) \geq l$ :

$$\begin{aligned} \text{LB}(p,i,l) &= \text{VRAI} && \text{si } l = 0 \\ \text{LB}(p,i,l) &= \left( \bigwedge_{\substack{qmin \leq j \leq qmax - \delta l \\ j \equiv \kappa i [\delta]}} (L_1(j) \wedge L_2(j) \wedge L_3(j) \wedge L_4(j)) \right) \\ &\quad \wedge (L'_1 \wedge L'_2 \wedge L'_3 \wedge L'_4) && \text{sinon} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} L_1(j) &= V_0(\langle i, j \rangle) \Rightarrow \neg V_2(\langle i, j + \delta l \rangle) \\ L_2(j) &= V_0(\langle i, j \rangle) \Rightarrow \neg V_3(\langle i, j + \delta l \rangle) \\ L_3(j) &= V_1(\langle i, j \rangle) \Rightarrow \neg V_2(\langle i, j + \delta l \rangle) \\ L_4(j) &= V_1(\langle i, j \rangle) \Rightarrow \neg V_3(\langle i, j + \delta l \rangle) \\ L'_1 &= \neg V_2(\langle i, qmin_i + \delta(l-1) \rangle) \\ L'_2 &= \neg V_3(\langle i, qmin_i + \delta(l-1) \rangle) \\ L'_3 &= \neg V_0(\langle i, qmax_i - \delta(l-1) \rangle) \\ L'_4 &= \neg V_1(\langle i, qmax_i - \delta(l-1) \rangle) \end{aligned}$$

**Lemme 7.1.4** – Si un ensemble  $E$  est  $Q$ -convexe selon  $p$  et  $q$  et vérifie  $X_p E(i) \geq l$  alors  $V = \Psi(E)$  satisfait  $\text{LB}(p,i,l)$ .

– Si  $V$  satisfait  $Q\text{CONV} \wedge \text{LB}(p,i,l)$ , alors  $E = \Phi(V)$  satisfait  $X_p E(i) \geq l$ .

*Démonstration:*

– Le cas  $l = 0$  est trivial, donc on peut supposer  $l \geq 1$ .

Soit  $j$  tel que  $qmin \leq j \leq qmax - \delta$ . Soit  $A = \langle i, j \rangle, B = \langle i, j + \delta l \rangle$ . On a  $A, B \in \Delta$ . Si on a  $V_0(A) \vee V_1(A)$  alors il n'y a pas de point sur la ligne  $p = i$  à gauche de  $A$ . Il y a seulement  $l - 1$  points entiers sur le segment  $]AB[$ , et  $E$  a  $l$  points sur la droite  $p = i$  donc il y a un point  $M = \langle i, j_M \rangle \in E$  vérifiant  $q(M) \geq j + \delta l$ . Donc on a  $\neg V_2(B) \wedge \neg V_3(B)$ . On a donc prouvé  $(V_0(A) \vee V_1(A)) \Rightarrow (\neg V_2(B) \wedge \neg V_3(B))$  ce qui est équivalent à la formule  $L_1(j) \wedge L_2(j) \wedge L_3(j) \wedge L_4(j)$ .

Restent à prouver les implications pour les bords. Or on a forcément  $L'_1 \wedge L'_2$  car il y a seulement  $l - 1$  points  $M$  vérifiant  $p(M) = i$  et  $q(M) \leq qmin_i + \delta$ . De même on a  $L'_3 \wedge L'_4$ .

– Soit  $A = \langle i, qmin_i \rangle$  et  $B = \langle i, qmin_i + l \rangle$ . D'après le lemme 7.1.1 et  $L'_1, L'_2$ , on a  $\neg V_2(M) \wedge \neg V_3(M)$ , pour tout  $M \in [A, B[$ .

Supposons que  $\neg V_0(A)$  et  $\neg V_1(A)$ , comme  $V$  satisfait  $Q\text{CONV}$  et d'après le lemme 7.1.1, on sait que  $\neg V_0(M) \wedge \neg V_1(M)$  pour tout  $M \in [AB) \cap \Delta$ . Donc  $E = \Phi(V)$  contient tous les points entiers de  $[A, B[$ , il y a  $l$  points sur  $[AB[$ , on a donc bien  $X_p E(i) \geq l$ .

Il reste à voir le cas  $V_0(A)$  ou  $V_1(A)$ . Soit

$$j' = \max\{j : V_0(\langle i, j \rangle) \text{ ou } V_1(\langle i, j \rangle)\}$$

Soit  $C = \langle i, j' \rangle$  et  $D = \langle i, j' + \delta l \rangle$ . D'après les formules  $L'_3$  ou  $L'_4$  on sait que  $j' \leq qmax_i - \delta l$  et donc  $D \in \Delta$ . D'après la maximalité de  $j'$  on sait que pour tout  $M \in ]CD) \cap \Delta$  on a  $\neg V_0(M) \wedge \neg V_1(M)$ . Comme  $V_0(C) \vee V_1(C)$  les formules  $L_1(j') \wedge L_2(j') \wedge L_3(j') \wedge L_4(j')$  montrent que  $\neg V_2(D) \wedge \neg V_3(D)$ . On en déduit que pour tout  $M \in ]CD]$  on a  $\neg V_k(M)$  pour tout  $k$  et donc  $E$  contient  $]CD]$  qui a exactement  $l$  points entiers.  $\square$

On peut définir de la même façon  $LB(q, j, l)$ .

### 7.1.4 La borne supérieure

Maintenant on veut exprimer que  $X_q(E)(j) \leq l$ .

Comme pour l'algorithme du chapitre 5, on va être obligé de fixer deux pieds. On considère donc deux points  $A, B \in \Delta$  tels que  $p(A) = pmin, p(B) = pmax$ .

On considère alors une droite  $q = j$ . La formule  $UB(q, j, l, A, B)$  va être définie par :

$$UB(q, j, l, A, B) = IN(A) \wedge IN(B) \wedge \bigwedge_{\substack{pmin \leq i \leq pmax - \delta l \\ j \equiv \kappa i [\delta]}} U(i)$$

où :

$$IN(M) = \neg V_0(M) \wedge \neg V_1(M) \wedge \neg V_2(M) \wedge \neg V_3(M)$$

- a) Si  $j \leq \min\{q(A), q(B)\}$ ,  $U(i) = \neg V_0(i, j) \Rightarrow V_1(i + \delta l, j)$
- b) Si  $q(A) \leq j \leq q(B)$   $U(i) = \neg V_3(i, j) \Rightarrow V_1(i + \delta l, j)$
- c) Si  $q(B) \leq j \leq q(A)$   $U(i) = \neg V_0(i, j) \Rightarrow V_2(i + \delta l, j)$
- b) Si  $j \geq \max\{q(A), q(B)\}$   $U(i) = \neg V_3(i, j) \Rightarrow V_2(i + \delta l, j)$

**Lemme 7.1.5** – Si un ensemble  $E$  contenant  $A, B$  est  $Q$ -convexe selon  $p$  et  $q$ , et si  $X_q E(j) \leq l$ , alors l'instanciation  $V = \Psi(E)$  satisfait  $QCONV \wedge UB(q, j, l, A, B)$ .

- Si  $V$  satisfait  $QCONV \wedge UB(q, j, l, A, B)$ , alors  $E = \Phi(V)$  contient les points  $A, B$ , et vérifie  $X_q E(j) \leq l$ .

*Démonstration:*

- Soit  $C = \langle i, j \rangle \in \Delta$  tel que  $pmin \leq j \leq pmax - \delta$ . On considère  $D = \langle i + \delta l, j \rangle \in \Delta$ . Supposons que l'on est dans le cas (a):  $j \leq \min\{q(A), q(B)\}$ . Tout point  $M$  de la droite  $q = j$  vérifie alors  $\neg V_2(M) \wedge \neg V_3(M)$ .

Si on avait  $\neg V_0(C) \wedge \neg V_1(D)$  alors  $E$  contiendrait tous les points de  $[CD]$  qui a  $l + 1$  points entiers. Donc on bien la formule  $U(i)$ .

On procède de la même façon pour les cas (b), (c) et (d).

- Comme  $V$  satisfait  $IN(A) \wedge IN(B)$ , les pieds  $A$  et  $B$  sont dans  $E$ .

Considérons encore le cas (a):  $j \leq \min\{q(A), q(B)\}$ . Les variables  $V$  satisfont  $QCONV$ , donc d'après le lemme 7.1.1 tout point  $M$  de la droite  $q = j$  vérifie  $\neg V_2(M)$  et  $\neg V_3(M)$ .

Si  $V_0(M)$  pour tout  $M$  tel que  $p(M) = i$  alors  $X_q(E)(i) = 0$  et donc le lemme est bien vérifié.

Sinon on considère  $i' = \min\{i : \neg V_0(\langle i, j \rangle)\}$ . Soit  $C = \langle i', j \rangle$  et  $D = \langle i' + \delta l, j \rangle$ . D'après  $U(i)$  on sait que l'on a  $V_1(D)$ . On en déduit que tous les points de  $E$  sur la droite  $p = i$  sont dans le segment  $[CD[$  qui a exactement  $l$  points et donc  $X_q(i) \leq l$ . On procède de la même façon pour les cas (b), (c) et (d).  $\square$

On peut définir de la même façon  $UB(p, i, l, A, B)$ .

### 7.1.5 L'algorithme de reconstruction

Soit  $(P, P', Q, Q') = ((p_i), (p'_i), (q_j), (q'_j))$  une instance de RECAPPROB.

On fixe alors quatre points  $A, B, C, D$  tels que  $p(A) = pmin$ ,  $p(B) = pmax$ ,  $q(C) = qmin$ ,  $q(D) = qmax$  puis on construit la formule booléenne

$$\begin{aligned} RAPP(P, P', Q, Q', A, B, C, D) = & QCONV \wedge \left( \bigwedge_{pmin \leq i \leq pmax} LB(p, i, p_i) \wedge UB(p, i, p'_i, C, D) \right) \\ & \wedge \left( \bigwedge_{qmin \leq j \leq qmax} LB(q, j, q_j) \wedge UB(q, j, q'_j, A, B) \right) \end{aligned}$$

En réunissant les lemmes 7.1.2, 7.1.4 et 7.1.5, on obtient :

**Théorème 7.1.6** *La formule  $RAPP(P, P', Q, Q', A, B, C, D)$  est satisfaisable si et seulement si il existe un  $Q$ -convexe contenant  $A, B, C, D$  satisfaisant le problème  $RECAPPROB(Q(p, q), p, q)$  avec comme donnée  $(P, P', Q, Q')$ . De plus si  $V$  satisfait  $RAPP(P, P', Q, Q', A, B, C, D)$  alors  $E = \Phi(V)$  est une solution de RECAPPROB.*

Ceci donne immédiatement un algorithme pour résoudre RECAPPROB : on fixe les 4 points  $A, B, C, D$ , on calcule la formule RAPP, puis on cherche les booléens  $V$  satisfaisant RAPP. Pour se faire on utilise un algorithme linéaire résolvant 2SAT ([APT79]). Si il y a une solution on retourne  $E = \Phi(V)$  sinon on choisit une autre position de pieds. Si on a étudié toutes les positions de pieds alors il n'y a pas de solution.

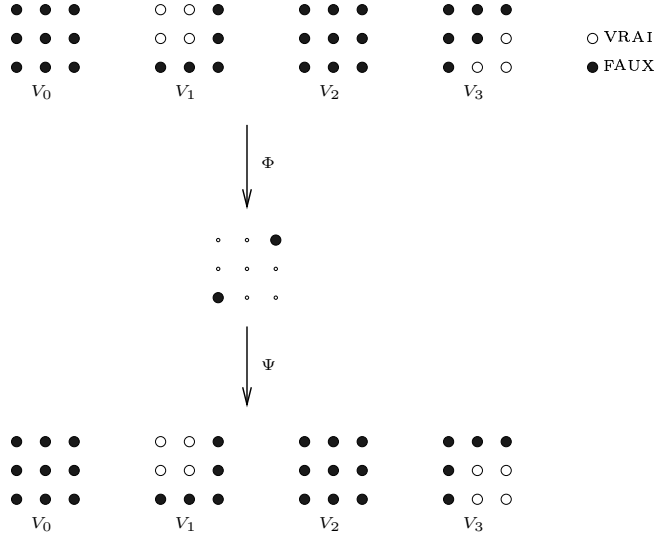
Il y a au plus  $lp^2lq^2$  possibilités de pieds. D'autre part la formule RAPP peut être calculée et résolue en  $O(lplq)$ . On en déduit :

**Corollaire 7.1.7** *Il existe un algorithme résolvant RECAPPROB et utilisant  $O(lp^3lq^3)$  opérations.*

**Remarque 7.1.8** – *L'application  $\Psi \circ \Phi$  même restreinte aux variables  $V$  vérifiant RAPP n'est pas égale à l'identité. On peut prendre par exemple :  $p = x$ ,  $q = y$ ,  $(p_i) = (p'_i) = (1, 0, 1)$ ,  $(q_i) = (q'_i) = (1, 0, 1)$ . (voir figure 7.1)*

– *Par contre dans le cas insécable  $\forall i, p_i > 0, q_i > 0$  l'application  $\Psi \circ \Phi$  est bien égale à l'identité sur les variables vérifiant RAPP. En effet comme  $\Phi(V)$  est  $Q$ -convexe on a  $\Phi \circ \Psi \circ \Phi(V) = \Phi(V)$  (remarque 7.1.3). Or comme  $\Phi(V)$  est insécable, pour tout point  $M \in \Delta \setminus \Phi(V)$  il existe un unique quadrant  $R_i(M)$  tel que  $R_i(M) \cap \Phi(V) = \emptyset$ . Donc  $\Phi(V) = \Phi(V') \Rightarrow V = V'$  d'où en prenant  $V' = \Psi \circ \Phi(V)$  on a bien  $V = \Psi \circ \Phi(V)$ .*



FIG. 7.1 – Exemple montrant que  $\Psi \circ \Phi \neq Id$ .

### 7.1.6 Retour à la reconstruction exacte.

En prenant  $P = P'$  et  $Q = Q'$ , RECAPPRO redevient le problème RECONSTRUCTION. Donc l'algorithme précédent permet aussi de résoudre  $RECONSTRUCTION(\mathcal{Q}(p,q),p,q)$ .

En fait dans ce cas on peut améliorer l'algorithme car comme dans le chapitre 5 on a besoin de fixer seulement 2 pieds.

En effet comme on doit avoir de toute façon  $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{j=1}^n q_j$ , on a seulement besoin d'exprimer la borne inférieure sur une direction et la borne supérieure sur l'autre. Plus précisément si  $A, B$  sont tels que  $p(A) = pmin$  et  $p(B) = pmax$  alors  $RECONSTRUCTION(\mathcal{Q}(p,q),p,q)$  va avoir une solution contenant  $A$  et  $B$  si et seulement la formule

$$REXACT(P,Q,A,B) = QCONV \wedge \bigwedge_{pmin \leq i \leq pmax} LB(p,i,p_i) \wedge \bigwedge_{qmin \leq j \leq qmax} UB(q,j,q_j,A,B).$$

est satisfaisable. Ceci permet de trouver un algorithme en  $O(lplq \min\{lp^2, lq^2\})$  pour résoudre  $RECONSTRUCTION(\mathcal{Q}(p,q),p,q)$ . C'est théoriquement mieux que l'algorithme du chapitre 5 mais on verra que dans la pratique ce n'est pas vraiment le cas.

### 7.1.7 Connexité

Si  $\mathcal{F}$  est la classe des HV-convexes 8-connexes alors d'après le théorème 2.5.3  $\mathcal{F}$  est la classe des Q-convexes insécables selon  $\{x,y\}$ . Pour résoudre  $RECAPPROB(\mathcal{F},\{x,y\})$  il suffit de remplacer  $(p_i)$  par  $(\max(p_i,1))$  et  $(q_j)$  par  $(\max(q_j,1))$ . On en déduit :

**Corollaire 7.1.9** *Le problème  $RECAPPROB(\mathcal{F},\{x,y\})$  où  $\mathcal{F}$  est la classe des HV-convexes 8-connexes peut être résolu en  $O(lx^3ly^3)$  opérations.*

Étudions maintenant la 4-connexité. La proposition 2.5.6 donne une caractérisation des HV-convexes 4-connexes avec les quadrants. Plus précisément si  $E$  est Q-convexe selon

$\{x, y\}$  alors  $E$  est 4-connexe si et seulement si :

$$\begin{aligned} E \cap (R_0(x, y) \cup R_2(x + 1, y + 1)) = \emptyset &\implies ((x, y) \notin \Delta \text{ ou } (x + 1, y + 1) \notin \Delta) \\ E \cap (R_1(x + 1, y) \cup R_2(x, y + 1)) = \emptyset &\implies ((x + 1, y) \notin \Delta \text{ ou } (x, y + 1) \notin \Delta) \end{aligned}$$

On peut donc exprimer la 4-connexité par la formule :

$$4CONN = \bigwedge_{\substack{(x, y) \in \Delta \\ (x+1, y+1) \in \Delta}} (\neg V_0(x, y) \vee \neg V_2(x + 1, y + 1)) \wedge \bigwedge_{\substack{(x+1, y) \in \Delta \\ (x, y+1) \in \Delta}} (\neg V_1(x + 1, y) \vee \neg V_2(x, y + 1))$$

(on retrouve les formules *Con* de [CD99].) On en déduit :

**Corollaire 7.1.10** *Le problème  $\text{RECAPPROB}(\mathcal{F}, \{x, y\})$  où  $\mathcal{F}$  est la classe des HV-convexes 4-connexes peut être résolu en  $O(lx^3ly^3)$  opérations.*

## 7.2 Plus de deux directions

### 7.2.1 Reconstruction approchée

On va étendre le problème  $\text{RECAPPROB}$  à un nombre quelconque de directions  $\text{RECAPPROB}(\mathcal{F}, \mathcal{D})$ .

Donnée : 2 suites  $(r_i^p)_{i \in \mathbb{Z}, p \in \mathcal{D}}, (r'_i{}^p)_{i \in \mathbb{Z}, p \in \mathcal{D}}$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et à support fini telles que  $rmin^p = rmin'^p, rmax^p = rmax'^p$  pour tout  $p \in \mathcal{D}$ .

Sortie : Un ensemble  $E \in \mathcal{F}$ , si il existe, dont les projections vérifient  $\forall p \in \mathcal{D} \forall i, j \in \mathbb{Z} r_i^p \leq X_p(i) \leq r'_i{}^p$

On ne peut pas généraliser l'algorithme de la section précédente pour résoudre  $\text{RECAPPROB}(\mathcal{Q}(\mathcal{D}), \mathcal{D})$  pour des ensembles  $\mathcal{D}$  à plus de deux directions. En fait son extension naturelle va permettre de reconstruire des Q-convexes forts.

Le but de cette partie est donc de chercher un algorithme pour résoudre  $\text{RECAPPROB}(\mathcal{QF}(\mathcal{D}), \mathcal{D})$  où  $\mathcal{QF}(\mathcal{D})$  désigne la classe des Q-convexes forts selon  $\mathcal{D}$ .

On se fixe donc une suite de projections  $(r_i^p)$ . Soit  $\Delta$  le polygone dont l'équation est :

$$\Delta = \{M \in \mathbb{Z}^2 \mid \forall p \in \mathcal{D}; rmin^p \leq p(M) \leq rmax^p\}$$

En fait on va utiliser exactement les mêmes techniques que précédemment mais en remplaçant les quadrants par des ASP. On désigne par  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{D})$  l'ensemble des indices des ASP.

Donc pour tout  $M \in \Delta$  on associe les variables booléennes  $(V_k^{pq}(M))_{(k, p, q) \in \mathcal{A}}$ .

On redéfinit les fonctions  $\Phi$  et  $\Psi$  comme suit :

$$E = \Phi(V) \text{ ssi } F = \{M \in \Delta \mid \forall (k, p, q) \in \mathcal{A} \neg V_k^{pq}(M)\};$$

$$V = \Psi(F) \text{ ssi } V_k^{pq}(M) = "R_k^{pq}(M) \cap F = \emptyset".$$

On définit la formule  $\text{SQCONV}$  par

$$\text{SQCONV} = \bigwedge_{(i, p, q) \in \mathcal{A}} \mathcal{R}_i^{pq}$$

où  $\mathcal{R}_i^{pq}$  est donné par les mêmes formules  $\mathcal{R}_k$  que précédemment.

On a alors l'équivalent du lemme 7.1.2 :

**Lemme 7.2.1** – Pour tout  $E \subset \Delta$  les booléens  $V = \Psi(F)$  vérifient la formule  $SQ-CONV$

– Si  $V$  vérifie  $SQCONV$  alors  $E = \Phi(V)$  est  $Q$ -convexe fort.

On va découper chaque droite de direction dans  $\mathcal{D}$  en deux demi-droites : pour cela on fixe un vecteur directeur  $\vec{p}$  pour chaque direction  $p \in \mathcal{D}$ . Les deux demi-droites d'origine  $M$  et de direction  $p$  sont alors :

$$s_+^p(M) = \{N : p(N) = p(M) \text{ et } \vec{p} \cdot \overrightarrow{ON} \geq \vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}\}$$

$$s_-^p(M) = \{N : p(N) = p(M) \text{ et } \vec{p} \cdot \overrightarrow{ON} \leq \vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}\}$$

où  $\cdot$  désigne le produit scalaire et  $O$  est une origine arbitraire.

Ceci va nous permettre de partager  $\mathcal{A}$  pour chaque direction  $p$  de  $\mathcal{D}$ .

$$\mathcal{A}_+^p = \{(q, r, k) \mid s_+^p(M) \subset R_k^{qr}(M)\}$$

$$\mathcal{A}_-^p = \{(q, r, k) \mid s_-^p(M) \subset R_k^{qr}(M)\}$$

On a  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+^p \cup \mathcal{A}_-^p$ .

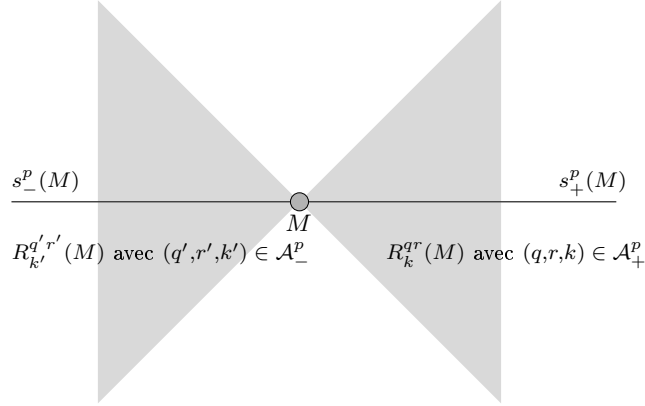


FIG. 7.2 – Partitionnement de l'ensemble des directions d'ASP.

Avec ces notations on va pouvoir donner la formule exprimant que  $X_p(v) \geq l$  :

$$\text{LB}(p, v, l) = \left( \bigwedge_{\substack{M \in \Delta \\ M + l\vec{p} \in \Delta \\ p(M) = v}} \bigwedge_{\substack{(p, q, k) \in \mathcal{A}_-^p \\ (p', q', k') \in \mathcal{A}_+^p}} (V_k^{qr}(M) \Rightarrow \neg V_k^{q'r'}(M + l\vec{p})) \right) \wedge \\ \left( \bigwedge_{(p, q, k) \in \mathcal{A}_+^p} \neg V_k^{pq}(M_{\min} + (l-1)\vec{p}) \right) \wedge \left( \bigwedge_{(p, q, k) \in \mathcal{A}_-^p} \neg V_k^{pq}(M_{\max} - (l-1)\vec{p}) \right)$$

où  $M_{\min}$  (resp  $M_{\max}$ ) est le point de  $\Delta$  tel que  $p(M) = v$  qui minimise (resp maximise)  $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{p}$ .

Comme avec deux directions on peut montrer le lemme suivant :

**Lemme 7.2.2** – Si  $E$  est  $Q$ -convexe fort selon  $\mathcal{D}$  et vérifie  $X_p E(v) \geq l$  alors  $V = \Psi(E)$  vérifie  $\text{LB}(p, v, l)$ .

– Si  $V$  vérifie  $\text{SQCONV} \wedge \text{LB}(p, v, l)$  alors  $E = \Phi(V)$  vérifie  $X_p E(v) \geq l$ .

Il reste la borne supérieure. On veut donc exprimer  $X_p E(v) \leq l$ . Pour cela on va être obligé de fixer  $n - 1$  paires de pieds  $(A_q, B_q)_{q \in \mathcal{D} \setminus \{p\}}$  pour avoir les points qui extrémisent toutes les directions de  $\mathcal{D}$  sauf  $p$ .

La seule chose à prouver est le lemme suivant :

**Lemme 7.2.3** Pour tout  $M \in \Delta$  il existe au plus un  $(q, r, k) \in \mathcal{A}_+^p$  tel que pour tout  $(q', r', k') \in \mathcal{A}_+^p$  différent de  $(q, r, k)$  l'ASP  $R_{k'}^{p'q'}$  contient un des points  $(A_q, B_q)_{q \in \mathcal{D} \setminus \{p\}}$ . On note  $W_+^p(M) = V_k^{qr}$ .

*Démonstration:* Soit  $M_{\max}$  le point de  $\mathbb{Q}^2$  qui maximise  $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{p}$  dans  $\text{conv}(\Delta)$ .

Comme pour tout  $(q, r, k) \in \mathcal{A}^+$  on a  $R_k^{qr}(M) \supset R_k^{qr}(M_{\max})$  il suffit de prouver la propriété pour  $M = M_{\max}$ .

Mais  $M_{\max}$  est sur un coté  $c$  du polygone  $\Delta$  de direction  $q_1 \neq p$ . On a donc un pied  $A$  sur ce coté. Considérons le coté  $c'$  consécutif de  $c$  dans  $\Delta$  qui n'est pas du coté de  $A$  par rapport à  $M_{\max}$ , ce coté est de direction  $q_2 \in \mathcal{D}$ .

– Supposons d'abord  $q_2 \neq p$ . Soit alors  $B$  le pied fixé sur ce coté. Il existe  $k$  tel que  $(q_1, q_2, k)$  est dans  $\mathcal{A}_+^p$  (car  $c$  et  $c'$  sont consécutifs). On va montrer que pour tout  $(q_3, q_4, k') \in \mathcal{A}_+^p$  différent de  $(q_1, q_2, k)$  l'ASP  $R_k^{q_3 q_4}(M_{\max})$  contient  $A$  ou  $B$ .

Considérons donc  $(q_3, q_4, k') \in \mathcal{A}_+^p$  tel que  $\Pi = R_k^{q_3 q_4}(M_{\max})$  ne contient ni  $A$  ni  $B$ .

On définit alors quatre demi-droites :

- $D_1$  est la demi-droite de direction  $p$ , d'origine  $M_{\max}$  qui n'est pas contenue dans  $\Delta$ ,
- $D_2$  est la demi-droite de direction  $q_1$ , d'origine  $M_{\max}$  qui ne contient pas  $A$ ,
- $D_3$  est la demi-droite de direction  $q_2$ , d'origine  $M_{\max}$  qui n'est pas du coté de  $A$  (par rapport à la droite  $D_1$ ,
- $D_4$  est l'autre demi-droite de direction  $q_2$ , d'origine  $M_{\max}$ .

(voir figure 7.3)

Par définition  $\Pi$  contient  $D_1$ . L'ASP  $\Pi$  contient  $D_2$  car il ne contient pas  $A$  et est un ASP.

Le quadrant  $\Pi$  est un ASP donc il contient  $D_3$  ou  $D_4$ . Si  $\Pi$  contient  $D_3$ , alors il contient la région entre  $D_3$  et  $D_2$  et donc il contient  $B$ , impossible. Donc  $\Pi$  contient  $D_1, D_2, D_4$  et donc  $\Pi = R_k^{q_1 q_2}(M_{\max})$ .

– Si  $q_2 = p$  un ASP de direction dans  $\mathcal{A}_+^p$  qui ne contient pas le point  $A$  contient forcément  $D_1$  et  $D_2$  et est donc le quadrant de frontière  $D_1 \cup D_2$  qui est un ASP car  $q_1$  et  $p$  sont alors consécutives.

□

On définit de la même façon  $W_-^p(M)$ .



### 7.2.2 Reconstruction exacte

Revenons maintenant à la reconstruction exacte. Comme avec deux directions il suffit d'imposer la borne supérieure pour seulement une direction et la borne inférieure pour les autres directions.

Pour exprimer la borne supérieure dans la direction  $p$  on est obligé de fixer les  $2(d-1)$  pieds qui sont sur les droites extrémales de direction différente de  $p$ .

Mais on peut faire les opérations de complétion décrites dans le chapitre 5, plus exactement on sait qu'après avoir fixé deux pieds dans une direction  $q \neq p$  et effectué les opérations de complétion décrite dans l'algorithme 6, alors toutes les droites de direction dans  $\mathcal{D}$  vont être de type  $ti$ . (voir remarque 5.2.4).

---

**Algorithme 6** Opérations de complétion nécessaires pour faire diminuer le nombre de pieds dans la reconstruction des Q-convexes forts.

---

Faire opérations  $\oplus', \ominus'$ .

**répète**

**pour** toute droite  $D$  de direction dans  $\mathcal{D}$  **faire**

Faire opérations  $\oplus, \ominus, \otimes, \odot, \odot', \odot''$  sur la droite  $D$

**fin pour**

**jusqu'à ce que** Les opérations n'ont rien changé

---

En particulier les droites extrémales pour une direction  $p \in \mathcal{D}$  sont de type t1, t2 ou t3. On connaît donc sur chacune de ces droites deux points  $A$  et  $B$  dont au moins l'un d'entre eux est dans toutes les solutions cherchées. (voir figure 7.4) On peut donc faire

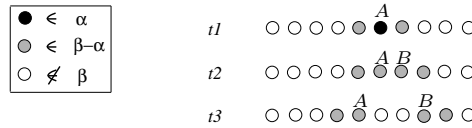


FIG. 7.4 – Pour les trois types de droites, on peut trouver deux points  $A$  et  $B$  dont au moins l'un d'entre eux est dans toutes les solutions.

seulement 2 choix pour ces pieds. On a donc au total  $2^{d-2}$  choix pour les pieds selon les  $d-2$  directions.

Calculons maintenant la complexité de l'algorithme ( $n$  désigne toujours  $\max_p(lp)$ ):

- Il y a au plus  $n^2$  possibilités pour les pieds liés à une première direction.
- Après avoir effectué les opérations de complétion décrites dans l'algorithme 6 qui prennent  $O(n^4)$  opérations il reste au plus un nombre constant de choix de pieds ( $2^{2d-2}$ ) pour les  $d-2$  autres directions dont les pieds doivent être fixés.
- Pour chaque choix de pied la réduction à 2-SAT peut être effectuée en  $O(|\Delta|)$  opérations soit  $O(n^2)$  opérations.

Ceci donne finalement un algorithme de reconstruction de complexité  $O(n^2(n^4 + n^2)) = O(n^6)$ .

**Corollaire 7.2.7** *Le problème  $\text{RECONSTRUCTION}(\mathcal{QF}(\mathcal{D}), \mathcal{D})$  peut être résolu en  $O(n^6)$  opérations.*

On a donc trouvé un meilleur algorithme pour les totalement convexes :

**Corollaire 7.2.8** *Si  $\mathcal{D}$  ne satisfait pas aux conditions équivalentes du théorème 6.2.4 et si  $\mathcal{C}$  est la classe des totalement convexes alors  $\text{RECONSTRUCTION}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  peut se résoudre en  $O(n^6)$  opérations.*

## 7.3 Reconstruction approchée avec localisation a priori

Dans le problème  $\text{RECAPPROBLOC}$  on impose aux solutions d'être comprises entre deux parties  $\alpha_0$  et  $\beta_0$ . En fait on a :

**Proposition 7.3.1** *Le problème  $\text{RECAPPROBLOC}(\mathcal{QF}(\mathcal{D}), \mathcal{D})$  peut être résolu en  $O(n^{2d+2})$  opérations, le problème  $\text{RECONSLOC}(\mathcal{QF}(\mathcal{D}), \mathcal{D})$  peut être résolu en  $O(n^6)$  opérations.*

En effet il suffit de rajouter dans la formule booléenne finale les formules  $\text{IN}(M)$  pour tout  $M \in \alpha_0$  et les formules  $W_-^p(M) \vee W_+^p(M)$  pour tout  $M \in \Delta \setminus \beta_0$ .

## 7.4 Implémentation

L'algorithme avec projections *approchées* tel qu'il est décrit dans ce chapitre est dans la pratique très lent. En effet contrairement à l'algorithme du chapitre 5, on est obligé de faire tous les choix des pieds. Mais comme les Q-convexes forts sont en particulier Q-convexes, on peut utiliser les opérations de complétion du chapitre 5. Par contre il faut les adapter aux cas de projections approchées.

Plus précisément les opérations  $\oplus, \ominus, \odot'$  n'utilisent pas les projections et peuvent donc aussi être utilisées, telles quelles, dans le cas approché. On peut aussi effectuer l'opération  $\otimes$  avec les projections minimales et les opérations  $\odot, \odot''$  avec les projections maximales. Pour utiliser les opérations  $\oplus'$  et  $\ominus'$  dans le cas approché on peut toujours utiliser les conditions  $S_k(M) + S_{k+1}(M) > A$  mais il faut calculer les  $S_k$  avec les projections minimales tandis que  $A$  est calculé avec les projections maximales ( $A = \min_{p \in \mathcal{D}} \sum p_i$ ).

Les temps de calculs de cette version de l'algorithme sont donnés en annexe B.2. On voit que la complexité expérimentale est plutôt en  $O(n^4)$  si on prend des projections inférieures et supérieures assez proches.

# Chapitre 8

## Conclusion et problèmes ouverts

### 8.1 Conclusion

L'objectif initial de cette thèse était l'étude des convexes de  $\mathbb{Z}^2$  et  $\mathbb{Z}^3$  et des points associés aux convexes comme les points saillants ou médians.

Une des difficultés était alors le nombre des définitions possibles pour la convexité : la convexité totale, la HV-convexité, la convexité simple selon plusieurs directions. D'autre part, il était souvent nécessaire de rajouter des hypothèses de connexité pour avoir des propriétés intéressantes. Par exemple, les polyominos HV-convexes contiennent toujours leurs points médians, alors que ce n'est pas le cas pour les HV-convexes.

Or les polyominos HV-convexes ont une propriété essentielle : si autour d'un point chacun des quadrants contient un point du polyomino alors le polyomino contient le point central (sens direct du théorème 2.5.3, déjà présent dans [BDLNP98]). Cette propriété des polyominos HV-convexes a permis d'introduire une nouvelle notion de convexité : la Q-convexité (convexité par quadrants).

Cette nouvelle notion a de bonnes propriétés mathématiques : l'intersection de deux Q-convexes est Q-convexe et un Q-convexe fini est complètement caractérisé par ses points saillants. De plus elle permet de généraliser (un peu) le théorème d'appartenance des médians.

Mais l'intérêt de cette définition apparaît clairement dans le problème de la tomographie. En effet l'algorithme de reconstruction des Q-convexes (chapitre 5) apparaît finalement comme une bonne généralisation à des directions quelconques de l'algorithme déjà connu pour les polyominos HV-convexes.

Jusqu'ici on avait utilisé la similitude des Q-convexes avec les polyominos HV-convexes, mais les Q-convexes sont aussi très proches des totalement convexes : la convexité totale est en quelque sorte la Q-convexité selon toutes les directions (proposition 2.6.1). Il est alors naturel de penser que, lorsque l'on a assez de directions, la Q-convexité aura des propriétés similaires à la convexité totale : c'est ce qui se produit en tomographie, les résultats d'unicité de Gardner et Gritzmann s'étendent aux Q-convexes. La conséquence importante de cette propriété, assez difficile à démontrer (voir 6.2.2), est la résolution d'un problème posé par Gritzmann : on sait reconstruire en temps polynomial les totalement convexes lorsque l'on a plus de sept directions (ou quatre directions bien choisies).



Dans la suite sont récapitulés les résultats connus dans les problèmes de reconstruction et d'unicité des ensembles de certaines classes à partir de leurs projections. Les parties encadrées sont les apports de cette thèse.

### 8.1.1 Complexité de RECONSTRUCTION

RECONSTRUCTION( $\mathcal{F}, \mathcal{D}$ ).

Donnée :  $|\mathcal{D}|$  suites  $((r_i^p)_{i \in \mathbb{Z}}, p \in \mathcal{D})$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et à support fini.

Sortie : Un ensemble  $E \in \mathcal{F}$ , si il existe, dont les projections vérifient  $\forall p \in \mathcal{D} \forall i \in \mathbb{Z} X_p(i) = r_i^p$

Le nombre  $n$  représente  $\max_p lp$  où  $lp = \max\{i : r_p^i > 0\} - \min\{i : r_p^i > 0\}$ .

Directions Classes	$\{x, y\}$	$ \mathcal{D}  = 2$	$\{x, y, x - y\}$	$ \mathcal{D}  \geq 3$	$ \mathcal{D}  \geq 4$ avec un birapport $\notin \{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\}$
quelconque	$O(n^2)$ [Rys57, Rys63]		NP-complet [GGP99]	NP-complet [GGP99]	
polyomino	NP-complet [Woe96]	?	?	?	?
hv-convexe	NP-complet [Woe96]	?	NP-complet [Yu96], [BBDLN00]	?	?
polyomino hv-convexe	$O(n^4)$ [BDLNP96], [BDLNP98], [CD99]	?	?	?	?
6-connexe convexe selon $h, v, x + y$	?	?	$O(n^5)$ [BBDLN00]	?	?
Q-convexes selon $\mathcal{D}$	$O(n^4)$ cor7.2.7	$O(n^4)$ cor7.2.7	$O(n^6)$ cor7.2.7 +pro2.7.6	$O(n^7)$ thm5.4.1	
Q-convexes forts				$O(n^6)$ cor7.2.7	
totalement convexes	?	?	?	?	$O(n^6)$ cor7.2.8

### 8.1.2 Unicité

Décrivons d'abord les cas où il y a unicité pour tous les ensembles de la classe : plus précisément on dit que l'on a  $\text{UNICITÉ}(\mathcal{F}, \mathcal{D})$  (unicité pour la classe  $\mathcal{F}$  et l'ensemble de directions  $\mathcal{D}$ ) si pour tous  $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$  on a :

$$(\forall p \in \mathcal{D} \ X_p E_1 = X_p E_2) \implies E_1 = E_2.$$

Directions Classes	$ \mathcal{D}  \leq 3$ ou tous les birapports dans $\{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\}$	$ \mathcal{D}  \geq 4$ avec un birapport $\notin \{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\}$
quelconques	NON [BDLNP]	
polyomino H-convexe	NON [BDLNP]	
HV-convexe	NON [BDLNP]	
Q-convexes selon $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ avec $ \mathcal{D}'  = 2$	NON [BDLNP], thm 6.2.4	??? (conjecture 8.2.2)
Q-convexes selon $\mathcal{D}$		OUI thm 6.2.6
totalement convexes		OUI [GG97]

$ESTUNIQUE(\mathcal{F}, \mathcal{D})$  .

Donnée : Une partie  $E \in \mathcal{F}$

Question : Existe-t-il un ensemble  $F \in \mathcal{F}$  tel que  $F \neq E$  et  $\forall p \in \mathcal{D} \forall i, j \in \mathbb{Z} X_p E(i) = X_p F(i)$  ?

Les complexités connues de ce problème pour différentes classes sont les suivantes: ( $n$  est le même que précédemment calculé avec les projections de  $E$ )

Directions Classes	$\{x, y\}$	$ \mathcal{D}  = 2$	$ \mathcal{D}  \geq 3$	$ \mathcal{D}  \geq 4$ avec un birapport $\notin \{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\}$
quelconques	$O(n^2)$ [Rys63]		NP-complet [GGP99]	
HV-convexes 4-connexes	$O(n^5)$	?	?	?
Q-convexes	$O(n^5)$ prop7.3.1 +prop6.3.1	$O(n^8)$ prop5.6.1+ prop6.3.1		1 thm6.2.6
Q-convexes forts	$O(n^5)$ prop7.3.1 +prop6.3.1	$O(n^7)$ prop7.3.1 +prop6.3.1		1 thm6.2.6
totalelement convexes	?	?	?	1 [GG97]

## 8.2 Problèmes ouverts

Terminons cette thèse par les questions concernant la tomographie et qui restent encore non résolues.

### 8.2.1 Reconstruction

Il reste encore beaucoup de cas où la complexité de  $\text{RECONSTRUCTION}(\mathcal{F}, \mathcal{D})$  est inconnue.

#### 8.2.1.1 Problème croisé

Il s'agit de la reconstruction des polyominos HV-convexes à partir des projections selon  $\{x + y, x - y\}$ .

Les centres sont sans doutes les bons analogues des points médians pour ce problème :

**Définition 8.2.1** *On dit que  $C \in \mathbb{Z}^2$  est un centre de  $E$  selon une distance  $d$  si il minimise la quantité*

$$D'(C) = \max_{N \in E} d(C, N).$$

Si on prend  $d(M, N) = d_1(M, N) = |x_M - x_N| + |y_M - y_N|$  alors les centres de  $E$  ne dépendent que des projections selon  $\{x + y, x - y\}$ . Elles ne dépendent en fait que du rectangle dont les cotés sont parallèles aux diagonales et qui contient  $E$ .

#### 8.2.1.2 Totalement convexes

On sait maintenant reconstruire en temps polynomial les totalement convexes à l'aide des projections selon certains ensembles de 4 directions comme  $\{x, y, x + 2y, -2x + y\}$ . Mais par exemple pour les directions  $\{x, y, x + y, x - y\}$ , cette méthode ne fonctionne pas car il n'y a pas unicité pour les Q-convexes. Mais si pouvait montrer par exemple qu'il y a unicité une fois que l'on a fixé les pieds, on aurait un algorithme pour reconstruire les totalement convexes.

### 8.2.2 Reconstruction approchée

L'algorithme présenté dans ce mémoire pour résoudre le problème approché a une complexité élevée ( $O(n^{2d+2})$ ). Peut on trouver un algorithme polynomial en fonction du nombre  $d$  de directions?

Un autre problème concernant la reconstruction approchée est la recherche de la solution optimale. Plus exactement il s'agit de reconstruire un ensemble  $E \subset \mathbb{Z}^2$  minimisant

$$\sum_{p \in \mathcal{D}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} |X_p E(i) - p_i|$$

Dans [BDN] les auteurs donnent un algorithme qui fournit une solution optimale pour la classe de polyominos HV-convexes et  $\mathcal{D} = \{x, y\}$ , mais cet algorithme n'est pas prouvé comme polynomial car il utilise un solveur de 3-SAT.

### 8.2.2.1 Reconstruction continue

La reconstruction des convexes de  $\mathbb{R}^2$  à partir de leurs projections est un problème qui a été assez étudié, mais aucun algorithme satisfaisant n'a été trouvé (voir [Gar95, p52-53],[KKV89]). Une solution consiste peut-être à trouver une version continue de l'algorithme de reconstruction discrète des Q-convexes. L'analogie continue de la classe des Q-convexes est sans doute celle des convexes simples connexes. En effet les Q-convexes forts discrets sont les traces sur  $\mathbb{Z}^2$  des convexes simples connexes (voir [Dau00]).

### 8.2.3 Unicité

#### 8.2.3.1 Affaiblissement de la convexité

Une généralisation du théorème 6.2.6 pourrait être :

**Conjecture 8.2.2** *Si  $\mathcal{D}$  satisfait aux conditions équivalentes du théorème 6.2.4 alors pour tout  $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$  tel que  $|\mathcal{D}'| = 2$  on a  $\text{UNICITÉ}(\mathcal{Q}(\mathcal{D}'), \mathcal{D})$ .*

Cette conjecture est vraie pour  $\mathcal{D}' = \{x, y\}$ ,  $\mathcal{D} = \{x, y, 2x + y, -x + 2y\}$  pour les ensembles inclus dans un carré  $13 \times 13$  (voir conjecture 6.1.2).

En prenant  $\mathcal{D}' = \{x, y\}$  on voit que cette conjecture est plus forte que la conjecture 4.5 de [BDLNP]. Mais si cette conjecture est vraie, sa preuve semble plus ardue que celle du théorème 6.2.6 car on ne peut pas partitionner les « switching-components » de la même façon (voir le « switching-component » de la figure 8.1).

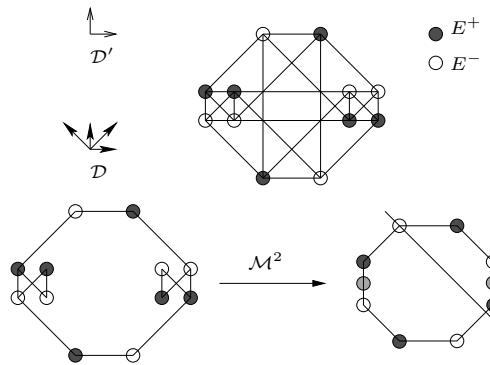


FIG. 8.1 – Une switching de  $\mathcal{D}'$ -Q-convexe selon  $\mathcal{D}$ , son image par  $\mathcal{M}^2$  n'est plus un switching-component selon  $\mathcal{D}'$

On pourrait aussi affaiblir la convexité en considérant par exemple des convexes « troués » c'est à dire des ensembles  $E \setminus F$  avec  $E$  et  $F$  convexes. (voir problème 2.6 de [Gar95])

#### 8.2.3.2 Dimension 3

On ne connaît aucun résultat d'unicité des solutions convexes (même totalement convexes) au problème de la reconstruction en dimension 3 (sauf dans le cas où les di-

rections sont coplanaires où l'on peut appliquer les résultats 2D). En fait même pour les convexes de  $\mathbb{R}^3$ , on a aucun résultat. (voir problèmes 2.1-2.3 de [Gar95])



# Annexe A

## Listes de « switching-components »

On présente ici quelques listes de « switching-components » calculés grâce à l'algorithme présenté au chapitre 6.

Les classes auxquelles appartiennent les switchings sont aussi précisées :

- « total » pour les totalement convexes.
- « qconvhv » pour les Q-convexes selon  $\{x,y\}$ .
- « qconvtous » pour les Q-convexes selon toutes les directions de projection.
- « qcq » pour les autres.

### A.1 Directions $\{x,y\}$

D'abord les switching d'ensembles quelconques inclus dans un carré  $3 \times 3$  :

1. fort



4. qcq



7. fort



10. fort



2. qcq



5. fort



8. fort



3. fort



6. qcq

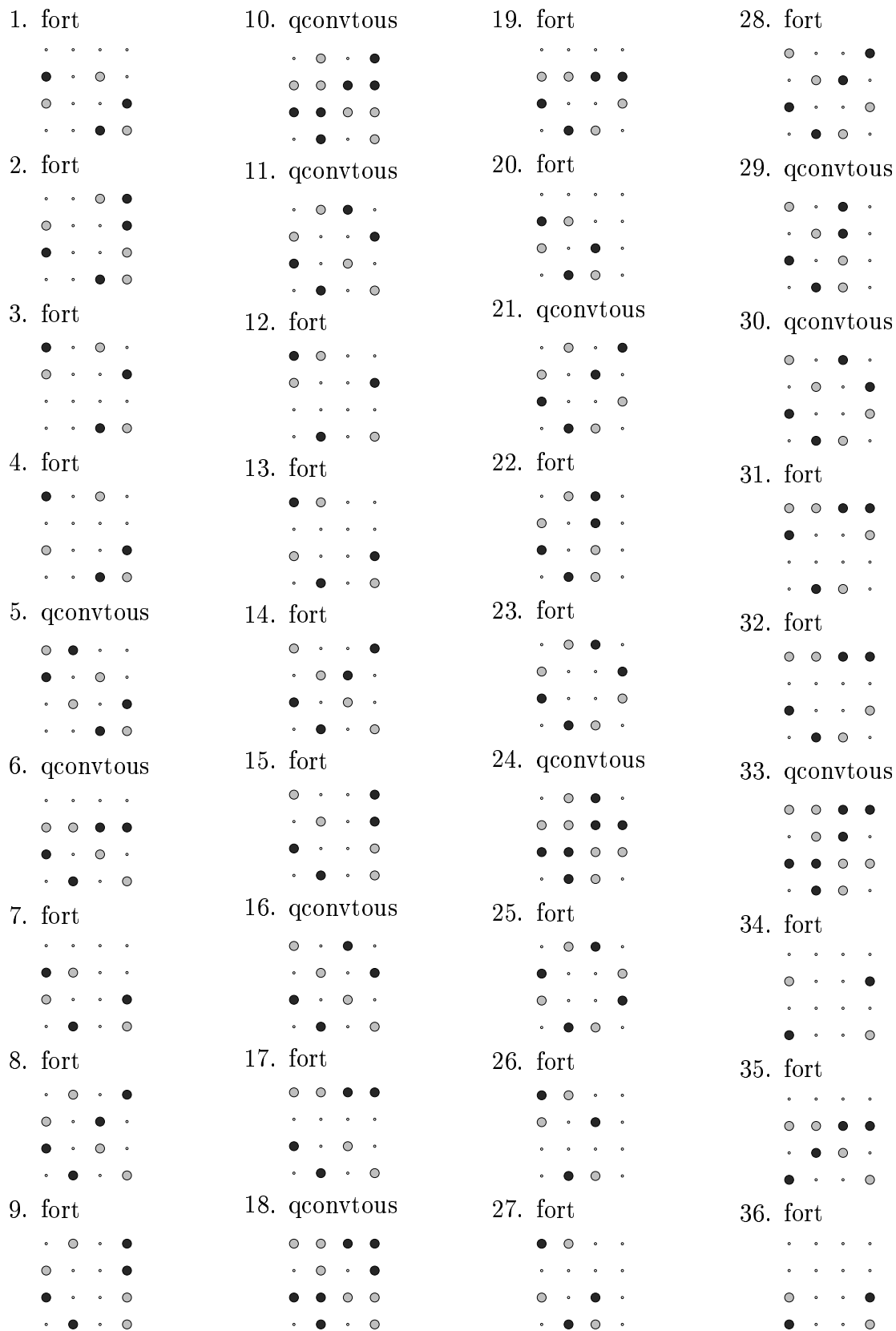


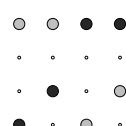
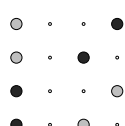
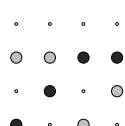
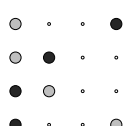
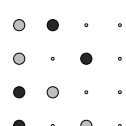
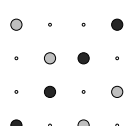
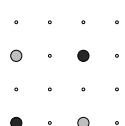
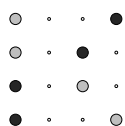
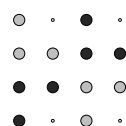
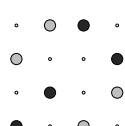
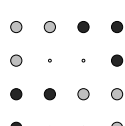
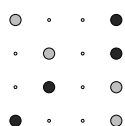
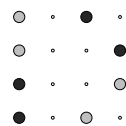
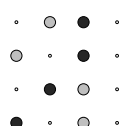
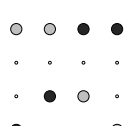
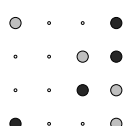
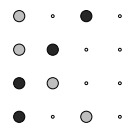
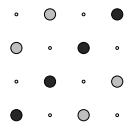
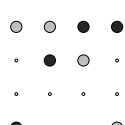
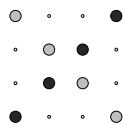
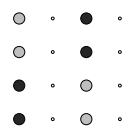
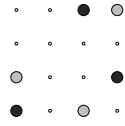
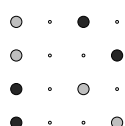
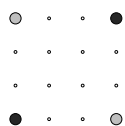
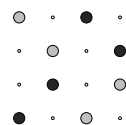
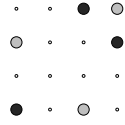
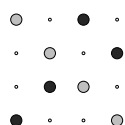
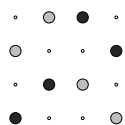
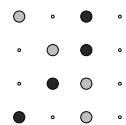
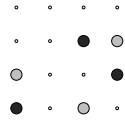
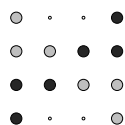
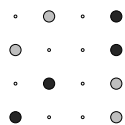
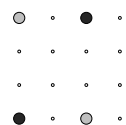
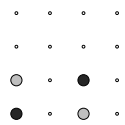
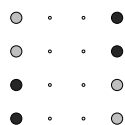
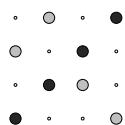
9. qcq



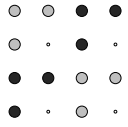


Switchings de Q-convexes selon  $x,y$  inclus dans un carré  $4 \times 4$ :

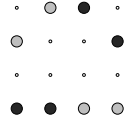




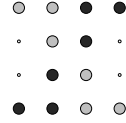
73. qconvtous



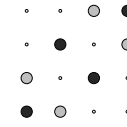
82. fort



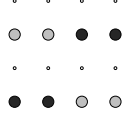
91. fort



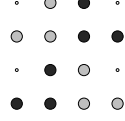
100. qconvtous



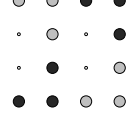
74. fort



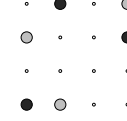
83. qconvtous



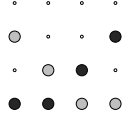
92. fort



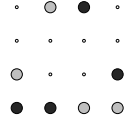
101. fort



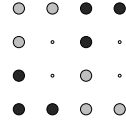
75. fort



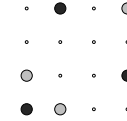
84. fort



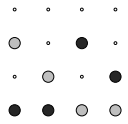
93. fort



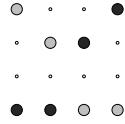
102. fort



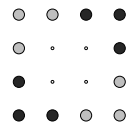
76. qconvtous



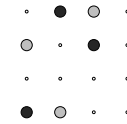
85. fort



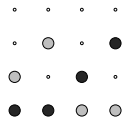
94. fort



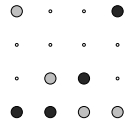
103. fort



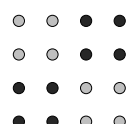
77. qconvtous



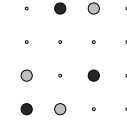
86. qconvtous



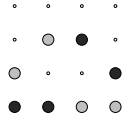
95. qconvtous



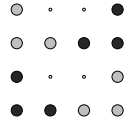
104. fort



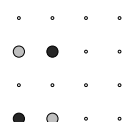
78. fort



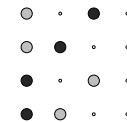
87. fort



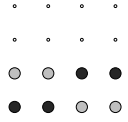
96. fort



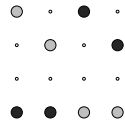
105. qconvtous



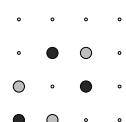
79. fort



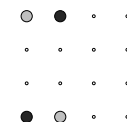
88. fort



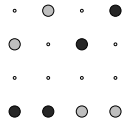
97. fort



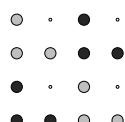
106. fort



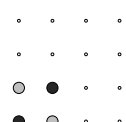
80. fort



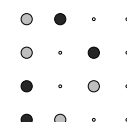
89. qconvtous



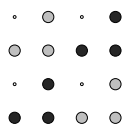
98. fort



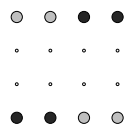
107. fort



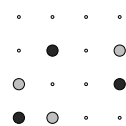
81. qconvtous



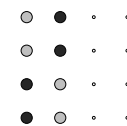
90. fort



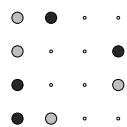
99. fort



108. fort



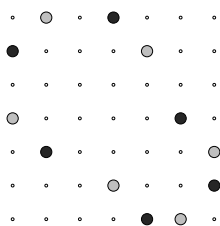
109. fort



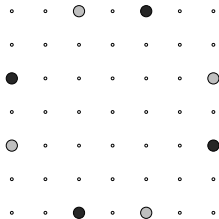
## A.2 Directions $\{x, y, x + y, x - y\}$

Switchings de Q-convexes selon  $x,y$  inclus dans un carré  $7 \times 7$ .

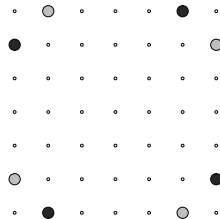
1. qconvhv



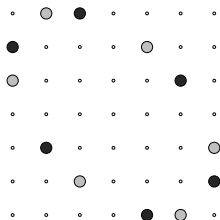
6. fort



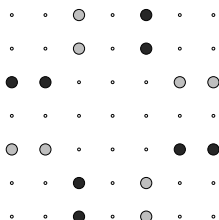
11. fort



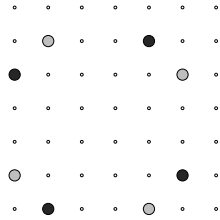
2. fort



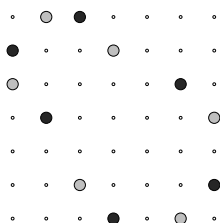
## 7. qconvtous



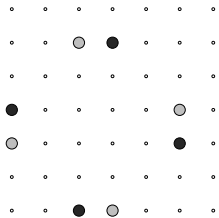
12. fort



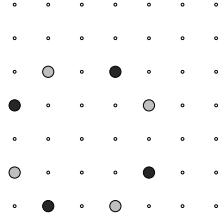
### 3. qconvhv



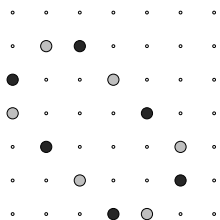
8. fort



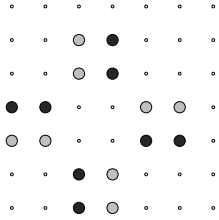
13. fort



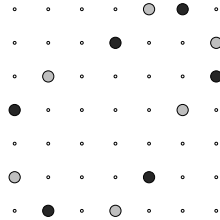
#### 4. qconvhv



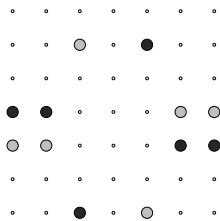
## 9. qconvhv



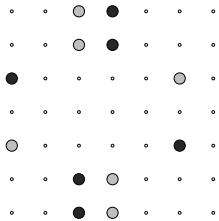
14. qconvhv



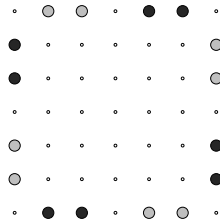
## 5. qconvhv



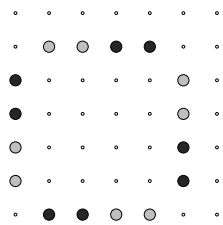
10. qconvhv



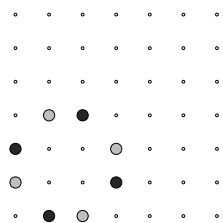
15. fort



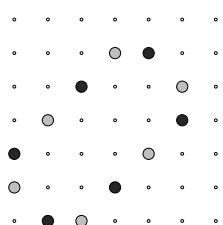
16. fort



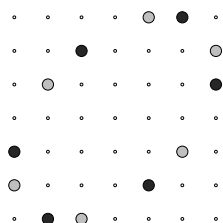
17. fort



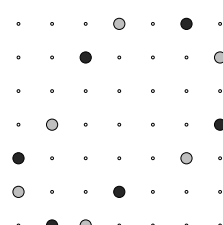
18. qconvhv



19. fort



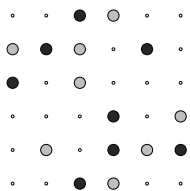
20. qconvhv



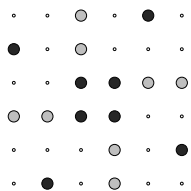
### A.3 Directions $\{x, y, 2x + y, x - 2y\}$

Switchings d'ensembles quelconques inclus dans un carré  $6 \times 6$ .

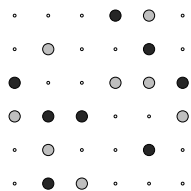
1. qcq



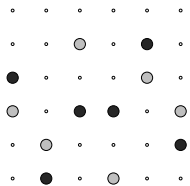
3. qcq



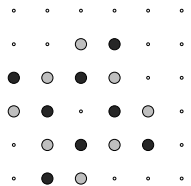
5. qcq



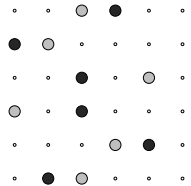
2. qcq



4. qcq



6. qcq



## Annexe B

# Complexités expérimentales des algorithmes de reconstruction des Q-convexes

### B.1 Reconstruction des Q-convexes avec l'algorithme du chapitre 5

L'algorithme du chapitre 5 a été implémenté en JAVA (jdk 1.2) sur un ATHLON 500.

Pour expérimenter l'algorithme on a généré des Q-convexes en prenant l'enveloppe Q-convexe de points au hasard, on calcule leurs projections, et on reconstruit un ensemble ayant ces projections.

Pour  $\mathcal{D} = \{x + y, x - y\}$  les temps de calcul sont les suivants :

n	essais	tps moy (s)	max (s)	nb 2-sat	0p	1p	2p
10	100	0.008	0.047	2	74	25	1
20	100	0.081	0.179	5	91	9	0
30	100	0.189	0.410	2	96	4	0
40	100	0.484	1.006	1	98	2	0
50	100	0.850	1.842	1	99	1	0
60	100	1.429	2.524	0	99	1	0
70	100	2.325	3.539	0	99	1	0
80	100	3.165	5.282	0	100	0	0
90	100	4.295	10.554	1	97	3	0
100	100	5.717	9.532	0	100	0	0
110	100	6.916	29.508	1	100	0	0

La 1<sup>ère</sup> colonne ( $n$ ) indique la taille des ensembles recherchés, plus exactement les ensembles considérés sont toujours dans un carré  $n \times n$ . La deuxième colonne indique le nombre d'essais, la troisième colonne le temps moyen pour effectuer l'algorithme, la 4<sup>e</sup> colonne indique le temps maximal. La 5<sup>ème</sup> colonne donne le nombre d'essais pour lesquels on a été obligé d'utiliser 2-SAT (ce sont les cas où il reste des points indéterminés après les opérations de complétion). La 6<sup>ème</sup> colonne donne le nombre d'essais pour lesquels il



a été inutile de fixer des pieds. Les 7èmes et 8èmes colonnes indiquent respectivement les nombres d'essais pour lesquels on est obligé de fixer un ou deux pieds.

Pour  $\mathcal{D} = \{x, y, 2x + y, -x + 2y\}$  on a des temps de calculs du même ordre (en fait deux fois plus grands).

n	essais	tps moy (s)	max (s)	nb 2-sat	0p	1p	2p
10	100	0.015	0.043	0	100	0	0
20	100	0.157	0.343	0	100	0	0
30	100	0.469	0.810	0	100	0	0
40	100	1.141	2.025	0	100	0	0
50	100	1.791	3.650	0	100	0	0
60	100	3.334	6.716	0	100	0	0
70	100	4.609	7.327	0	100	0	0
80	100	7.074	11.568	0	100	0	0
90	100	9.328	13.021	0	100	0	0
100	100	12.666	19.657	0	100	0	0

## B.2 Reconstruction approchée des $Q$ -convexes forts avec l'algorithme du chapitre 7

Pour tester le deuxième algorithme on utilise la même méthode que précédemment sauf qu'au lieu de prendre les projections d'un ensemble  $Q$ -convexe on effectue l'algorithme avec les projections encadrantes  $(p_i, p'_i)$  définies par  $p_i = \max(0, X_p(i) - d)$ ,  $p'_i = X_p(i) + d$  sauf pour  $i \in \{pmin, pmax\}$  où on prend  $p_i = \max(1, X_p(i) + d)$ . Les temps de calcul sont alors les suivants pour  $\mathcal{D} = \{x + y, x - y\}$  et  $d = 2$ :

n	essais	tps moy (s)	max (s)	nb 2-sat	0p	1p	2p	3p	4p
10	100	0.031	0.152	88	16	1	7	62	14
20	100	2.447	35.532	99	2	2	6	50	40
30	100	28.668	1698.632	99	1	0	9	41	49
40	100	56.372	2967.384	100	0	0	9	35	56
50	100	52.485	609.291	99	1	0	10	37	52

Pour  $\mathcal{D} = \{x, y, 2x + y, -x + 2y\}$  et  $d = 2$ :

n	essais	tps moy (s)	max (s)	nb 2-sat	0p	1p	2p	3p	4p	5p	6p	7p	8p
10	100	0.041	0.152	86	51	32	10	6	1	0	0	0	0
20	100	0.888	2.500	98	20	28	14	21	14	2	1	0	0
30	100	3.255	9.601	96	11	22	23	18	15	8	3	0	0
40	100	9.713	31.369	98	18	28	30	17	4	3	0	0	0
50	100	18.490	79.340	100	22	22	25	18	10	3	0	0	0

Pour  $\mathcal{D} = \{x + y, x - y\}$  et  $d = 0$  (on teste en fait l'algorithme de reconstruction exacte des  $Q$ -convexes forts du corollaire 7.2.7) :

n	essais	tps moy (s)	max (s)	nb 2sat	0p	1p	2p
10	100	0.010	0.137	1	67	32	1
20	100	0.107	1.339	3	87	13	0
30	100	0.246	1.114	0	93	7	0
40	100	0.582	1.167	0	98	2	0
50	100	0.996	1.858	0	96	4	0
60	100	2.765	94.340	1	99	1	0
70	100	2.550	5.565	0	100	0	0
80	100	4.346	66.252	1	98	2	0
90	100	4.848	9.500	0	100	0	0
100	100	6.773	13.709	0	99	1	0

Toutes ces données sont rassemblées dans la figure B.1. En faisant une corrélation par puissance on peut déduire de toutes ces données la complexité moyenne *empirique* de ces algorithmes.

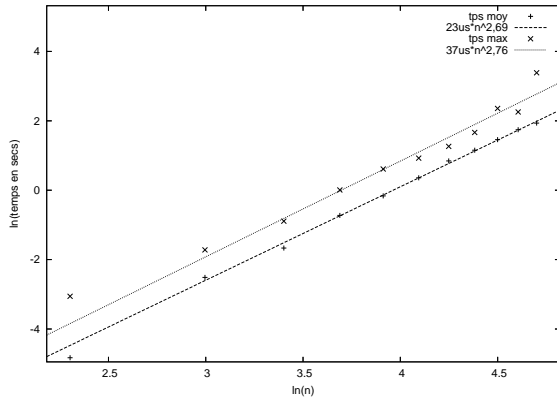
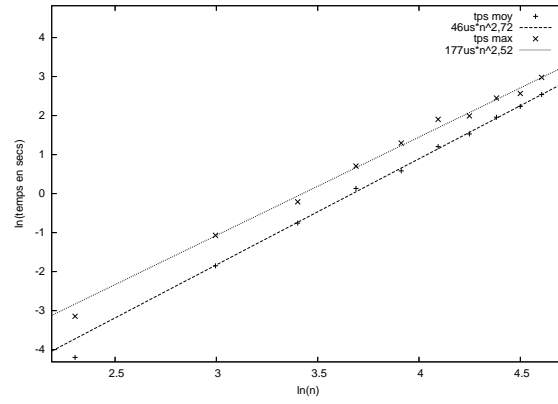
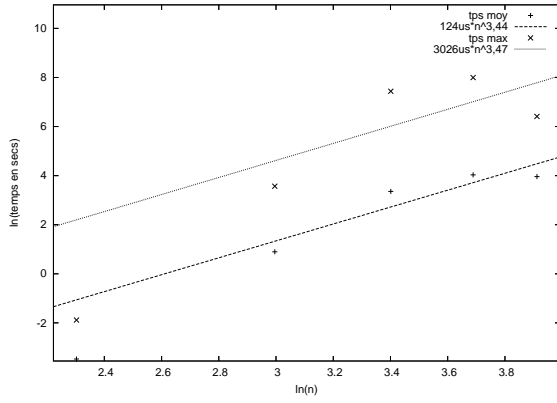
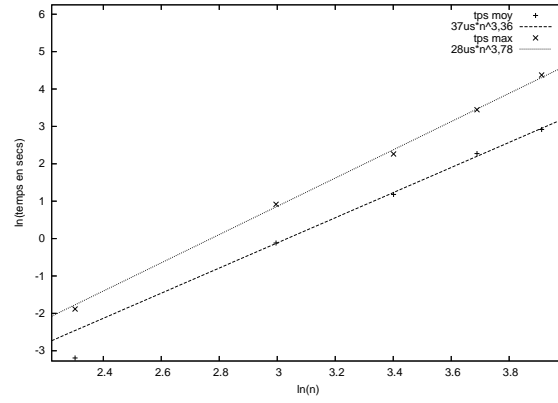
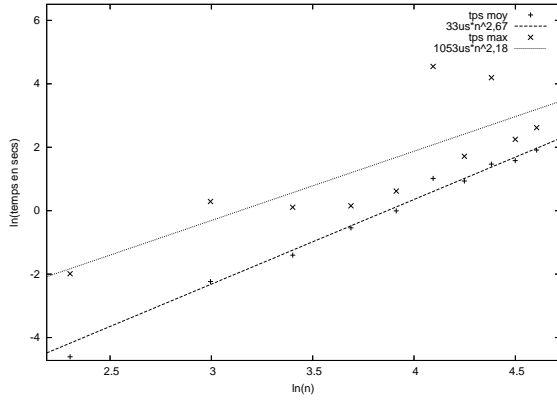

 1er algo  $\mathcal{D} = \{x + y, x - y\}$ 

 1er algo  $\mathcal{D} = \{x, y, 2x + y, -x + 2y\}$ 

 2e algo  $\mathcal{D} = \{x + y, x - y\}, d = 2$ 

 2e algo  $\mathcal{D} = \{x, y, 2x + y, -x + 2y\}, d = 2$ 

 2er algo  $\mathcal{D} = \{x + y, x - y\}$  exact ( $d = 0$ )

FIG. B.1 – Représentation log-log des temps de calculs pour reconstruire des  $Q$ -convexes et  $Q$ -convexes forts grâce aux projections approximatives ou non, le 1<sup>er</sup> algorithme est celui du chapitre 5, le 2<sup>ème</sup> algorithme celui du chapitre 7

# Bibliographie

- [APT79] B. Aspvall, M. Plass, et R. Tarjan. A linear-time algorithm for testing the truth of certain quantified boolean formulas. *Information Processing Letters*, 8(3), 1979.
- [BBDLN00] E. Barcucci, S. Brunetti, A. Del Lungo, et M. Nivat. Reconstruction of discrete sets from three or more X-rays. Dans *Proc. of CIAC 2000*, volume 1767 de *Lecture Notes in Computer Science*, p. 199–210. Springer, 2000.
- [BCL92] J. Barthelemy, G. Cohen, et A. Lobstein. *Complexité algorithmique*. Masson, 1992.
- [BD00] S. Brunetti et A. Daurat. Reconstruction of discrete sets from two or more X-rays in any direction. Dans *Proceedings of the seventh International Workshop on Combinatorial Analysis (IWCIA'00)*, p. 241–258. Université de Caen, 2000.
- [BDLDR<sup>+</sup>99] S. Brunetti, A. Del Lungo, F. Del Ristoro, A. Kuba, et M. Nivat. Reconstruction of 4- and 8-connected convex discrete sets from row and column projections. Prépublication, 1999.
- [BDLNP] E. Barcucci, A. Del Lungo, M. Nivat, et R. Pinzani. X-rays characterizing some classes of discrete sets. Prépublication.
- [BDLNP96] E. Barcucci, A. Del Lungo, M. Nivat, et R. Pinzani. Reconstructing convex polyominoes from horizontal and vertical projections. *Theor. Comp. Sci.*, 155(2):321–347, 1996.
- [BDLNP98] E. Barcucci, A. Del Lungo, M. Nivat, et R. Pinzani. Medians of polyominoes: A property for the reconstruction. *Int. J. Imaging Systems and Techn.*, 8:69–77, 1998.
- [BDN] Y. Boufkhad, O. Dubois, et M. Nivat. Reconstructing (h,v)-convex bi-dimensional patterns of objects from approximate horizontal and vertical projections. Prépublication.
- [Ber90] M. Berger. *Géométrie*. Nathan, 1990.
- [BMF95] M. Bousquet-Mélou et J.-M. Fédou. The generating function of convex polyominoes: the resolution of a  $q$ -differential system. *Discrete Math.*, 137:53–75, 1995.
- [CD94] V. Chepoi et F. Dragan. Computing a median point of a simple rectilinear polygon. *Inf. Proc. Lett.*, 49:281–285, 1994.
- [CD99] M. Chrobak et C. Dürr. Reconstructing HV-convex polyominoes from orthogonal projections. *Inf. Proc. Lett.*, 69(6):283–289, 1999.

- [CM91] J.-M. Chassery et A. Montanvert. *Géométrie discrète en analyse d'images*, chapitre 4-5. Hermès, 1991.
- [Dar78] M. G. Darboux. Sur un problème de géométrie élémentaire. *Bull. Sci. Math.*, 2:298–304, 1878.
- [Dau00] A. Daurat. Connexité et convexité directionnelle dans  $\mathbb{Z}^2$ . Dans *CNR'IUT2000*, volume 1, p. 341–350. Presses Universitaires d'Orléans, 2000.
- [DDLN00] A. Daurat, A. Del Lungo, et M. Nivat. Median points of discrete sets according to a linear distance. *Disc. and Comp. Geom.*, 23:465–483, 2000.
- [DLN99] A. Del Lungo et M. Nivat. Reconstruction of connected sets from two projections. Dans [HK99], chapitre 7, p. 163–188. 1999.
- [DLNPS98] A. Del Lungo, M. Nivat, R. Pinzani, et L. Sorri. The medians of discrete sets. *Inf. Proc. Lett.*, 65:283–299, 1998.
- [Gar95] R. J. Gardner. *Geometric Tomography*, volume 58 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1995.
- [Geb98] M. Gebala. The reconstruction of convex polyominoes from horizontal and vertical projections. Dans *Proc. of 25th Conference on Current Trends in Theory and Practice of Informatics*, volume 1521 de *Lecture Notes in Computer Science*, p. 350–359. Springer, 1998.
- [GG97] R. J. Gardner et P. Gritzmann. Discrete tomography: Determination of finite sets by X-rays. *Trans. Am. Math. Soc.*, 349(6):2271–2295, 1997.
- [GG99] R. J. Gardner et P. Gritzmann. Uniqueness and complexity in discrete tomography. Dans [HK99], chapitre 4, p. 88–90. 1999.
- [GGP99] R. J. Gardner, P. Gritzmann, et D. Prangenberg. On the computational complexity of reconstructing lattice sets from their x-rays. *Disc. Math.*, 202:45–71, 1999.
- [GM80] R. J. Gardner et P. McMullen. On Hammer's X-ray problem. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 21:171–175, 1980.
- [Gri97] P. Gritzmann. On the reconstruction of finite lattice sets from their X-rays. Dans E. Ahronovitz et C. Fiorio, éditeurs, *Disc. Geom. for Comp. Imag. (DGCI'97)*, volume 1347 de *Lecture Notes in Computer Science*, p. 19–32. Springer, 1997.
- [GS93] B. Grünbaum et G. C. Shephard. Pick's theorem. *American Mathematical Monthly*, 100(2):150–161, 1993.
- [Gér99] Y. Gérard. *Contribution à la géométrie discrète*. Thèse de Doctorat, LLAIC1, Université d'Auvergne, 1999.
- [Ham63] P. C. Hammer. Unsolved problems. Dans *Proc. Symp. Pure Math.*, vol 7: *Convexity*, p. 498–499. Amer. Math. Soc., 1963.
- [HK99] G. T. Herman et A. Kuba, éditeurs. *Discrete tomography*. Birkäuser, 1999.
- [Kim81] C. Kim. On the cellular convexity of complexes. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-3(6):617–625, Nov. 1981.
- [KKV89] D. Kölzow, A. Kuba, et A. Volčič. An algorithm for reconstructing convex bodies from their projections. *Disc. and Comp. Geom.*, 4:205–237, 1989.

- [Kub99] A. Kuba. Reconstruction in different classes of 2D discrete sets. Dans G. Bertrand, M. Couprie, et L. Perroton, éditeurs, *Disc. Geom. for Comp. Imag. (DGCI'99)*, volume 1568 de *Lecture Notes in Computer Science*, p. 153–163. Springer, 1999.
- [MS96] Y. Métivier et N. Saheb. Medians and centres of polyominoes. *Inf. Proc. Let.*, 57:175–181, 1996.
- [Ron85] C. Ronse. Definitions of convexity and convex hulls in digital images. *Bull. Soc. Math. Belg. (B)*, 37(2):71–85, 1985.
- [Ron86] C. Ronse. A strong chord property for 4-connected convex digital sets. *Comput. Graphics Image Process.*, 35:259–269, 1986.
- [Rys57] H. J. Ryser. Combinatorial properties of matrices of zeroes and ones. *Canad. J. Math.*, 9:371–377, 1957.
- [Rys63] H. J. Ryser. *Combinatorial Mathematics*. Mathematical Association of America, 1963. Traduction française, Mathématiques combinatoires par P. Camion, 1969, Dunod.
- [Rén52] A. Rényi. On projections of probability distributions. *Acta. Math. Acad. Sci. Hung.*, 3:131–142, 1952.
- [Sch92] L. Schwartz. *Analyse*, volume II, chapitre 3.2, p. 52. Hermann, 1992.
- [Sor97] L. Sorri. Centroide di un poliomino convesso lungo due direzioni. Mémoire de lauréat, Università di Firenze, 1997.
- [Tof96] P. Toft. *The Radon Transform. Theory and Implementation*. Thèse de Doctorat, Technical University of Denmark, 1996.
- [Woe96] G. H. Woeginger. The reconstruction of polyominoes from horizontal and vertical projections. Technical report SFB-65, TU Graz, Graz, 1996.
- [Yao90] F. F. Yao. Computational geometry. Dans J. v. Leeuwen, éditeur, *Handbook of theoretical computer science*, volume A Algorithms and Complexity, chapitre 7, p. 343–389. Elsevier, 1990.
- [Yu96] W. Yu. *The two-machine flow shop problem with delays and the one-machine total tardiness problem*. Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven, 1996. Dissertation, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven, 1996.



# Index

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , 21
- $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ , 36
- ASP, 36
- Birapport, 91
- $\mathcal{C}$ , 89
- Connexité, 14
- Convexité
  - 2-convexité, 13
  - $k$ -convexité, 13
  - HV-convexité, 14
  - par quadrants, 24
    - forte, 36
  - S-convexité, 64
  - selon Sorri, 64
  - simple, 23
  - totale, 13
- $d_1$ , 59
- $d_\infty$ , 60
- Direction, 21
  - diagonale, 60
- Distance linéaire, 55
- Droite projective, 91
- $\mathcal{E}(\alpha, \beta)$ , 73
- Épigraphe, 49
- EXISTENCE( $\mathcal{F}, \mathcal{D}$ ), 70
- Fonctions
  - convexes, 47
  - strictement convexes, 50
- HV-convexité, 14
- Insécabilité, 30
- $\mathcal{L}_i$ , 22
- Médian, 55
- Opération de complétion, 73
- Pied, 27
- Point
  - médian, 55
  - saillant, 42
- Point extrémal, 14
- Polyomino, 14
- presque-demi-plan, 36
- Projections, 56
- $\mathcal{Q}(\mathcal{D})$ , 84
- $\mathcal{Q}(p, q)$ , 73
- Q-convexité, 24, 33
  - forte, 36
- $QCONVFORT_{\mathcal{D}}(E)$ , 37
- $QCONV_{pq}(E)$ , 25
- $\mathcal{QF}(\mathcal{D})$ , 121
- RECAPPB( $\mathcal{F}, \mathcal{D}$ ), 121
- RECAPPB( $\mathcal{F}, p, q$ ), 114
- RECAPPBLOC( $\mathcal{F}, \mathcal{D}$ ), 126
- RECONSLOC( $\mathcal{F}, \mathcal{D}$ ), 87
- Reconstruction, 70
- RECONSTRUCTION( $\mathcal{F}, \mathcal{D}$ ), 70
- Réseau, 22
- $R_i(M)$ , 24
- Saillant, 25, 42
  - multiplicité, 26
  - quadré, 26
  - quadrés consécutifs, 26
- $S_i(k)$ , 57
- $S_i(M)$ , 57
- Sommet, 14
- Sous-réseau, 22
- Supporter, 103



Switching-component, 89

Transformation

linéaire, 91

projective, 91

UNICITÉ( $\mathcal{F}, \mathcal{D}$ ), 89

Voisinage, 56

$X_p E(i)$ , 56



# Convexité dans le plan discret. Application à la tomographie

---

## Résumé:

La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude des *convexes* dans le plan discret  $\mathbb{Z}^2$  ou plus généralement  $\mathbb{Z}^n$ . Il existe en fait plusieurs notions de convexité discrète: la convexité simple selon certaines directions, la convexité totale (la convexité usuelle du continu), etc. La *Q-convexité* est encore une nouvelle classe qui généralise à la fois les totalement convexes et les polyominos HV-convexes. On étudie les liens entre toutes ces différentes notions, et on donne des propriétés des points particuliers de ces ensembles comme les points médians et les points saillants.

Toute la deuxième partie est dédiée au problème de la tomographie dans le plan discret  $\mathbb{Z}^2$ . Il s'agit simplement de reconstruire un ensemble à partir du nombre de points dans les droites parallèles à des directions données. L'algorithme polynomial, déjà connu pour les polyominos HV-convexes avec les directions horizontales et verticales, se généralise aux Q-convexes pour des directions quelconques. D'autre part, le théorème d'unicité qui montre en particulier que sept directions suffisent pour déterminer un totalement convexe se généralise aussi aux Q-convexes. On en déduit que lorsque l'on a assez de directions pour avoir unicité de la solution, la reconstruction des totalement convexes peut se faire en temps polynomial. On a aussi un algorithme polynomial de reconstruction *approchée* des Q-convexes.

---

**Discipline :** Algorithmique

---

**Mots-clés :** Convexité discrète, tomographie discrète, reconstruction d'images binaires

---

**Laboratoires :** LLAIC1, IUT Clermont-Ferrand, BP86 63172 Aubière Cedex  
LIAFA, Université Denis Diderot, 75251 Paris Cedex 05

---

# Convexity in Digital Plane. Application to Discrete Tomography

---

## Abstract:

The first part of the thesis is dedicated to the convexity in the discrete plane  $\mathbb{Z}^2$  or more generally  $\mathbb{Z}^n$ . In fact there exist many notions of discrete convexity: the simple convexity along some prescribed directions, the total convexity (the usual convexity in the continuous), etc. The Q-convexity is a new class of convexity which generalizes both the totally convex sets and the HV-convex polyominoes. We study the links between all these notions, and the properties of special points of these sets such the median points and the salient points.

In all the second part we are interested in the main problem of discrete tomography: reconstructing a subset of  $\mathbb{Z}^2$  from the number of its points in each line parallel to some prescribed directions. The polynomial algorithm already known for the HV-convex polyominoes and the horizontal and vertical directions can be generalized to work with Q-convex sets and any directions. On another hand the uniqueness result which shows that 7 directions are sufficient to determine completely a totally convex set from its projections can also be generalized to Q-convex sets. We deduce that when there are enough directions to have uniqueness the reconstruction of totally convex sets can be made in polynomial time. We also have a polynomial algorithm to find Q-convex sets from their approximative projections.

---

**Keywords:** Discrete convexity, Discrete Tomography, Binary Image Reconstruction